Solução dos
Problemas Semanais
Data: 30/07/2012

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.23. Um mágico apresenta uma folha contendo o calendário de um mês qualquer do ano e pede a um voluntário que escolha, nessa folha, um bloco quadrado de datas, contendo quatro linhas por quatro colunas. O mágico pede a essa pessoa, então, que escolha quatro datas desse bloco, sendo que as quatro datas devem ser de colunas distintas e também de linhas distintas. O mágico pede ao voluntário que calcule a soma das quatro datas, em segredo, e que em seguida informe a primeira data, que aparece na primeira linha e primeira coluna do bloco.
Finalmente o mágico revela a soma das quatro datas escolhidas.
Como o mágico pode fazer isso?
Solução

A soma doa quatro números escolhidos no bloco (matriz) 4 por 4 será a soma dos números que aparecem na diagonal principal, aquela que vai da primeira linha à última dentro do bloco escolhido. Par ilustrar, vamos considerar o calendário de setembro de 2012, a seguir.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Vamos supor que o voluntário tenha escolhido o bloco destacado. Neste caso, a soma será 4 + 12 + 20 + 28 = 64.
A justificativa para este fato é que a soma dos quatro números escolhidos será a soma dos números na primeira coluna, no exemplo são 4 + 11 + 18 + 25 = 58, acrescido de 6, que corresponde a deslocamentos para a direita (colunas) de 0, 1, 2 e 3 unidades (0 + 1 + 2 + 3 = 6) quando são escolhidos os números da primeira, segunda, terceira e quarta colunas.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.23. Usando o quadro-negro, dois estudantes, A e B, disputam um jogo em que jogam alternadamente. Uma jogada consiste em escrever um número de 1 a 2012, inclusive, de acordo com as regras seguintes. O primeiro a jogar, o jogador A, escreve o número 1. Nas jogadas seguintes, cada jogador, na sua vez de jogar,

escreve no quadro-negro um número que não esteja no quadro-negro e que seja ou igual a $m + 1$ ou igual a $2m$, para algum número m que já esteja escrito.
O jogador que escrever o número 2012 vence o jogo.
Num jogo sem erros, determine qual dos jogadores, A ou B, será o ganhador. Explique porque ganhará, não importando tão bem jogue seu opositor.
Solução

O jogador B vence o jogo.

O jogador que escreve 1006 ou 2011 perde o jogo, porque na jogada seguinte seu oponente escreve 2012, fazendo $2.1006 = 2012$ ou $2011 + 1 = 2012$.

O vencedor é o jogador que força seu oponente a escrever 1006 ou 2011.

Agora, observe que nenhum dos jogadores consegue escrever 1007, porque 1007 é ímpar, e, portanto, não se escreve como $2.a$, onde a é um número natural, e também não pode ser obtido como $1006 + 1$, porque quem joga em seguida ao que obteve 1006, escrve 2012 e o jogo termina.

Isso significa que os números que um jogador tem de escolher para vencer são os que vão de 1 até 1005 e os que vão de 1007 a 2010, num total de $1005 + (2010 – 1007) = 1005 + 1003 = 2008$, que é um número par.

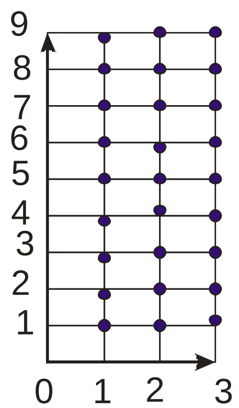
Logo, depois de uma jogada de A, haverá números disponíveis, eo jogador B poderá escolher um desses números, pois ou encontrará um número a que ainda não foi escrito tal que $a – 1$ já esta escxrito, ou poderá escrever 1006, porque já está escrito o número 503.

Depois de 2010 jogadas, 1005 jogadas de cada um dos jogadores, o jogador A tem de escolher os únicos números disponíveis: 1006 ou 2011. Ao escrever um deles, o jogador B vence.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.23. **I**magine que todo ponto do plano cartesiano possa ser pintado com uma das cores: azul ou vermelho. Prove que, não importa qual seja a pintura feita, existe um retângulo com todos os vértices da mesma cor.
Solução

Considere os 27 pontos de coordenadas inteiras (m, n), com $1 \le m \le 3$ e $1 \le n \le 2^3 + 1 = 9$, distribuídos em 9 linhas e 3 colunas.



Com duas cores, cada um dos pontos de uma dessas linhas pode ser pintado de dois modos diferentes: azul ou vermelha. Assim, cada linha pode ser pintada de $2^3 = 8$ modos distintos. Como só existem 8 tipos diferentes de pintura e são 9 linhas, então duas dessas linhas tem a mesma pintura.
Suponha que as duas linhas que tenham a mesma pintura sejam: a linha i e a linha j.
Então os pontos (i, k) e (j, k) tem a mesma pintura, para todo $k = 1, 2,3$.
Sem perda de generalidade, podemos supor que os pontos $(i, 1)$ e $(j, 1)$ sejam azuis.
Se os pontos $(i,2)$ e $(j, 2)$ ou $(i, 3)$ e $(j, 3)$ forem azuis, então teremos um retângulo monocromático, aquele com vértices: $(i, 1)$, $(j, 1)$, $(i,2)$ e $(j, 2)$ ou $(i, 1)$, $(j, 1)$, $(i, 3)$ e $(j, 3)$.
Se os pontos $(i,2)$, $(j, 2)$ e $(i, 3)$, $(j, 3)$ forem vermelhos, então teremos um retângulo monocromático de vértices: $(i,2)$, $(j, 2)$, $(i, 3)$ e $(j, 3)$.
Portanto, se todo ponto do plano cartesiano for pintado com uma das cores: azul ou vermelho, não importa qual seja a pintura feita, existe um retângulo com todos os vértices da mesma cor.