Soluções dos
Problemas Semanais
Data: 06/08/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.24. Na etapa 0 escrevem-se os números **1, 1.**

Na etapa 1 intercala-se a soma dos números 1, **2**, 1.

Na etapa 2, entre cada par de números da etapa anterior, intercala-se a soma deles: 1, **3**, 2, **3**, 1.

Uma etapa mais: 1, **4**, 3, **5**, 2, **5**, 3, **4**, 1.

Quantos números existem na etapa 10?

Qual é a soma de todos os números que há na etapa 10?

Solução

Existem 1025 números na etapa 10 e a soma desses números é igual a 59050.

Observe que na etapa 1 existem 3 números: 1, **2,** 1. Logo, existem 3 – 1 = 2 “buracos” (intervalos) entre esses números.

Na etapa 2 existem 5 números: 1, **3**, 2, **3**, 1. Logo, existem 4 “buracos” entre esses números.

Na etapa 3 existem 9 números: 1, **4**, 3, **5**, 2, **5**, 3, **4**, 1. Logo, existem 8 “buracos” entre esses números.

Assim, a partir da etapa 1, a quantidade de “buracos” entre os números corresponde a sequência:

$2,\ 4 = 2^2,\ 8 = 2^3, \ldots\ldots$

É fácil ver que, se na etapa n existem X_n elementos, o número de “buracos” (intervalos) entre esses números é igual a $(X_n – 1)$.

Assim, na etapa $n + 1$ existem $(X_n + X_n – 1)$ números. Portanto, usando a notação acima, temos que: $X_{n+1} = X_n + X_n – 1$, que é o mesmo que $X_{n+1} – 1 = 2(X_n – 1)$. Isto significa que a sequência dos números da forma $(X_{n+1} – 1)$ é tal que cada número é o dobro do anterior (Chamamos uma sequência deste tipo de *sequência geométrica*). Como na etapa 0, $X_0 = 2$, temos que:

$X_1 – 1 = 2.(X_0 – 1) \Rightarrow X_1 = 1 + 2^1;$

$X_2 - 1 = 2(X_1 – 1) = 2(1 + 2^1) \Rightarrow X_2 = 1 + 2^2;$

$X_3 – 1 = 2(X_2 – 1) = 2(1 + 2^2) \Rightarrow X_3 = 1 + 2^3;$

....

$X_n = 1 + 2^n.$

Portanto, na etapa 10, existem $1 + 2^{10} = 1025$ números.

Agora, seja Y_n a soma dos números na etapa n. Observe que, na soma dos números na etapa $n + 1$ aparece a soma Y_n mais os novos números que surgem com a soma, que são cada um dos números na etapa imediatamente anterior, etapa n, duas vezes, exceto os 1 que aparecem nos extremos e que só são somados uma vez. Isto significa que

$Y_{n+1} = Y_n + 2\,Y_n – 2$, que é o mesmo que $Y_{n+1} = 3Y_n – 2$, ou ainda $Y_{n+1} - 1 = 3(Y_n – 1)$. De modo análogo aos argumentos anteriores, é fácil ver que a sequência de números da forma $(Y_{n+1} – 1)$ é sequência geométrica com $Y_n – 1 = 3^n$. Ou seja, $Y_n = 1 + 3^n$.

Portanto, a soma de todos os números que há na etapa 10 é igual a $Y_{10} = 1 + 3^{10} = 59050$.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.24. **D**etermine o menor número inteiro positivo que tenha todos os seus dígitos iguais a 4, e que seja múltiplo de 169.

Solução

Observe que 169 = 13.13 e 44444...44 = 4.11111...11.

Logo, para responder a pergunta, temos que buscar o menor múltiplo de 169 que seja escrito na base 10 exclusivamente com dígito 1.

O primeiro múltiplo de 13 formado, na base 10, formado inteiramente com dígitos 1 é igual a K = 111111. Mas, observe que K não é múltiplo de 169, pois é somente 13 e não de 13^2.

Como $\underbrace{111...11}_{k\ vezes} = 1111110^{k-6} + \underbrace{11...11}_{k-6\ vezes}$, tomamos K.K = 111111.111111 $=10^6$.K + K, que é um número com 12 dígitos (o número de dígitos é múltiplo de 6 para que K.K seja múltiplo de 13).

Agora, tome K.K.K = 10^{12}K + 10^6 K+ K = K(10^{12} + 10^6 + 1). Mas, o número entre parênteses não é divisível por 13 (deixa resto 3 na divisão por 13). Para que o número KKK....K seja divisível por 13, a quantidade de fatores K será igual a 6.13 = 78.

Portanto, o menor número inteiro positivo que tenha todos os seus dígitos iguais a 4, e que seja múltiplo de 169 será igual a $4.\underbrace{111111....111111}_{13\ blocos\ de\ seis\ dígitos\ 1} = \underbrace{44444....444444}_{setenta\ e\ oito\ dígitos\ 4}$.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.24. **I**magine que cada ponto do plano cartesiano seja pintado com uma das três cores: vermelha, cinza ou azul, usando todas as três cores.

Prove que, não importa como os pontos sejam coloridos, para uma dada distância *d*, existe dois pontos de mesma cor cuja distância entre eles é *d* .

Solução

Mesma solução usada no problema número 2 da lista 17, tomando o triângulo equilátero de lado *d* e fazendo a rotação de modo que a distância dos vértices superiores seja *d*.