$\in$

Solução dos
Problemas Semanais
Data: 13/08/2012

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

1.25. Dentro de uma caixa há 1995 bolas pretas e 2000 bolas brancas, e fora dela há 5000 bolas brancas. Retiramos da caixa 2 bolas. Se elas forem da mesma cor então retornamos uma bola branca. Se elas forem de cores distintas retornamos uma bola preta. Repete-se o processo até que reste uma única bola na caixa.
Qual pode ser a sua cor?

Solução

A bola restante ao final do processo é de cor preta.
Observe que, d e acordo com as hipóteses, se as duas bolas retiradas são brancas ou de cores distintas, o número de bolas pretas não se altera. Se as duas bolas retiradas são pretas, então o total de bolas pretas é reduzido de duas unidades. Concluímos então que a paridade do número de bolas pretas é invariante, e, neste caso, é ímpar. Assim, não é possível que consigamos tirar todas as bolas pretas da caixa, pois assim ficaríamos com zero bola, que é um número par.
Portanto, a bola restante ao final do processo é de cor preta.

Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

2.25. **D**e quantas maneiras os números 1, 2, 3, ..., 2012 podem ser colocados nos vértices de um polígono regular de 2012 lados (um número por vértice), de maneira tal que dois números adjacentes não diferem por mais de dois?

Solução

Como o polígono tem 2012 vértices, existem 2012 maneiras distintas de colocar o número 1 em um vértice. Os dois números adjacentes a 1 são, obrigatoriamente 2 e 3. Existem duas maneiras distintas de colocar esses dois números: considerando o sentido anti-horário, o 2 pode vir antes ou depois do número1. Agora, observe que a posição destes dois números determina obrigatoriamente a posição dos restantes. Portanto, existem 2012 . 2 = 4024 maneiras distintas de colocar números 1, 2, 3, ..., 2012 nos vértices de um polígono regular de 2012 lados.

Nível III (Alunos do Ensino Médio)

3.25. Se os números reais x e y satisfazem a equação $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$, qual é o valor mínimo da expressão x^2+y^2?

Solução

Seja $x+5=14\cos\theta \;\; e \;\; y-5=14sen\theta$, para $\theta\in[0,2\pi]$.

Assim, podemos escrever $x=14\cos\theta-5$ e $y=14sen\theta+12$ e

$$x^2+y^2=(14\cos\theta-5)^2+(14sen\theta+12)^2=$$

$=196\cos^2\theta+25-140\cos\theta+196sen^2\theta+144+336sen\theta=196+169-140\cos\theta+336sen\theta=$

$=365+28(12sen\theta-5\cos\theta)$.

Agora, observe que a expressão $(12sen\theta-5\cos\theta)$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$(12sen\theta-5\cos\theta)=a.sen(\theta-\varphi)$, para um número real a apropriado.

De fato, $12sen\theta-5\cos\theta=12(sen\theta-\frac{5}{12}sen\theta)$. Agora, defina φ como sendo tal que $tg\,\varphi=\frac{sen\varphi}{\cos\varphi}=\frac{5}{12}$.

Assim, $12\left(sen\theta-\frac{5}{12}\cos\theta\right)=12\left(sen\theta-\frac{sen\varphi}{\cos\varphi}\cos\theta\right)=\frac{12}{\cos\varphi}\left(sen\theta\cos\varphi-sen\varphi\cos\theta\right)=$

$=12sec\,\varphi.sen(\theta-\varphi)$.

Como $1+tg^2\varphi=\sec^2\varphi\Leftrightarrow1+\frac{25}{144}=\sec^2\varphi\Leftrightarrow\sec^2\varphi=\frac{169}{144}\Rightarrow\sec\varphi=\frac{13}{12}\Leftrightarrow12\sec\varphi=13$.

Logo, $x^2+y^2=365+28.13.sen(\theta-\varphi)=365+364.sen(\theta-\varphi)$.

Portanto, $x^2+y^2=365+365+364.sen(\theta-\varphi)$ é mínimo quando $sen(\theta-\varphi)=-1$. Ou seja, o valor mínimo da expressão x^2+y^2 é -1.