**Solução dos Problemas Semanais**
**Data: 20/08/2012**

Olimpíada Brasileira de Matemática

Competição Matemática do Rio Grande do Norte

UFRN EXTENSÃO

# Nível I (Alunos do 6o. e 7o. anos do Ensino Fundamental)

**1.26.** **C**hamamos de $S(n)$ à soma dos dígitos do número inteiro $n$. Por exemplo, $S(327)=3+2+7=12$; $S(489)=4+8+9=21$.

Encontre o valor da expressão $A=S(1)-S(2)+S(3)-S(4)+...+S(2011)-S(2012)$.

Nota: A expressão $A$ possui 2012 termos.

**Solução**

Inicialmente, observe que, se $n$ é um número par então S($n$ + 1) = S($n$) = 1, pois $n$ e $n$ + 1 diferem somente pelo dígito das unidades. Como $n$ é par o dígito será 0, 2, 4, 6 ou 8 e para $n$ + 1 será, respectivamente, 1, 3, 5, 7 ou 9. Assim, temos

S(1) = 1,
S(3) – S(2) = 1,
S(5) – S(4) = 1,
S(7) – S(6) = 1,
.......................,
S(2011) – S(2010),

Somando membro a membro as igualdades anteriores, obtemos:

S(1) + S(3) – S(2) + S(5) – S(4) + S(7) – S(6) + .... + S(2011) – S(2010) = 1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1, que é o mesmo que

S(1) + S(3) – S(2) + S(5) – S(4) + S(7) – S(6) + .... + S(2011) – S(2010) = 1006. (*)

Agora, observe que S(2012) = 2 + 0 + 1 + 2 = 5. Então diminuindo S(2012) a cada membro de (*), obtemos: $A=S(1)-S(2)+S(3)-S(4)+...+S(2011)-S(2012)$ = 1006 – 5 = 1001

# Nível II (Alunos do 8o. e 9o. anos do Ensino Fundamental)

**2.26**. **U**m número natural de quatro dígitos é chamado de *gago* se tem os dois primeiros dígitos iguais entre si e os dois últimos iguais entre si. Por exemplo, 3311 e 2222 são números *gagos*.

Encontre todos os números *gagos* que são quadrados perfeitos.

**Solução**

É fácil ver que, como todo número gago é da forma *aabb*, então todo número gago é divisível por 11. Segue que o quadrado de todo número gago é múltiplo de $11^2$ = 121. Agora, os múltiplos naturais de 121 são: 121 = 121 . 1, 242 = 121 . 2, 363 = 121 . 3, 484 = 121 . 4, 605 = 121 . 5,, ....., 121 . $m$, .....

Desse modo, como 121 = $11^2$, os múltiplos de 121 são aqueles da forma 121 . *m*, onde *m* é um quadrado perfeito. Em ordem crescente, o primeiro múltiplo de 121 com quatro ditos é 1210= 121 . 10 e o último é 9922 = 121 . 82. Portanto, os possíveis valores de *m* (que é quadrado perfeito) são: 16, 25, 36, 49, 64, 81. É fácil ver que, dentre esses valores, somente *m* = 64 nos dá um número *gago*: 121.64 = 7744.

# Nível III (Alunos do Ensino Médio)

**3.26. U**m número natural é chamado de *número sortudo* se a soma de seus dígitos é 7.
(a) Escreva em ordem decrescente os últimos seis números sortudos.
(b) Se $a_n = 2005$, calcule $a_{5n}$.

**Solução**

É um fato conhecido que o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k = m \ (*)$$

é $C_{m+k-1}^{m}$.

Logo, o número de soluções inteiras da equação (*), com a restrição de que $x_1 \geq 1$ e $x_i \geq 0$, para $i \geq 2$, é igual a $C_{m+k-2}^{m-1}$. Tomando *m* = 7, a quantidade de *números sortudos* com *k* dígitos, *p*(*k*), é igual a $p(k) = C_{k+5}^{6}$.

Como $p(1) = C_6^6$ = 1, $p(2) = C_7^6 = 7$, $p(3) = C_8^6 = 28$, a quantidade de *números sortudos* da forma 1*abc* é a mesma quantidade de soluções da equação $a + b + c = 6$. Isto é, a quantidade de números sortudos da forma 1*abc* é $C_{6+3-1}^{6} = 28$.

Como 2005 é o primeiro *número sortudo* da forma 2*abc*, e como 1 + 7 + 28 + 28 + 1 = 65, então 2005 é o 65-ésimo *número sortudo*. Ou seja, $a_{65} = 2005$ e $5n = 5.65 = 325$. (Queremos encontrar $a_{325}$).

Por outro lado, $p(4) = C_9^4 = 84$ e $p(5) = C_{10}^6 = 210$. Assim, temos que:

$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1 + 7 + 28 + 84 + 210 = 330$. Portanto, em ordem decrescente, os últimos seis *números sortudos* são 70000, 61000, 60100, 60010, 52000 e o 325-ésimo *número sortudo* é $a_{325} = a_{5.65} = 52000$.