OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA
LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO – 2011 – No. 01
NÍVEIS I e II

Problema 1
Calcule:

(a) $\dfrac{20092008^2}{20092007^2+20092009^2-2}$

Solução:
(a) Chamando $x=20092008$, podemos reescrever a fração dada como;

$$\frac{x^2}{(x-1)^2+(x+1)^2-2}=\frac{x^2}{\left(x^2-2x+1\right)+\left(x^2+2x+1\right)^2-2}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

b) $3-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{42}-\dfrac{1}{56}=3-\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3}-\dfrac{1}{3.4}-\dfrac{1}{4.5}-\dfrac{1}{5.6}-\dfrac{1}{6.7}-\dfrac{1}{7.8}$.

Agora, como temos que $\dfrac{1}{k.(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, podemos escrever a soma

$3-\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3}-\dfrac{1}{3.4}-\dfrac{1}{4.5}-\dfrac{1}{5.6}-\dfrac{1}{6.7}-\dfrac{1}{7.8}$ como sendo

$3-\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)-\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}\right)-\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}\right)$, que, fazendo

os devidos cancelamentos, é o mesmo que $3-1-\dfrac{1}{8}=2-\dfrac{1}{8}=\dfrac{15}{8}=2\dfrac{1}{8}$.

(c) Inicialmente, observe que todos os denominadores das parcelas da soma

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$$

podem ser escritos como produtos de dois números. Ou seja, podemos reescrever a soma dada como sendo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\frac{1}{11.13}.$$

Por outro lado, temos que $\frac{1}{k.(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$.

Agora, usando a observação acima, podemos escrever a soma dada, $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\frac{1}{11.13}$, como sendo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right).$$

Assim, pelo visto acima, a soma $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$, depois dos devidos

cancelamentos, será igual a: $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{2}.\frac{12}{13}=\frac{6}{13}$.

(d) Observe que a soma $\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+...+\frac{99^2+1}{99^2-1}$ pode ser rescrita como:

$\left(1+\frac{2}{3^2-1}\right)+\left(1+\frac{2}{5^2-1}\right)+\left(1+\frac{2}{7^2-1}\right)+....+\left(1+\frac{2}{99^2-1}\right)$, que é o mesmo que

$\left(1+1+1+....+1\right)+\left(\frac{2}{3^2-1}+\frac{2}{5^2-1}+\frac{2}{7^2-1}+.....+\frac{2}{99^2-1}\right)$, ou ainda

$$49+\left[\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{98.100}\right].$$

Agora, observe que $\frac{1}{k.(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ implica em $\frac{2}{k.(k+2)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$.

Assim, podemos escrever $49+\left[\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{98.100}\right]$ como sendo

$49+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)$, ou ainda, depois dos cancelamentos, teremos $49+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=\frac{4900+50-1}{100}=49\frac{49}{100}$.

(e) Como a soma dos k primeiros números naturais é igual a $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$,

Podemos concluir que o k-ésimo termo da soma dada é igual a

$$\frac{1}{1+2+3+...+k+1}=\frac{1}{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}=\frac{2}{(k+1)(k+2)}=2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right).$$

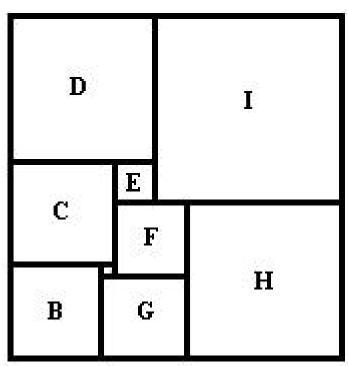
Portanto, a soma dada:

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+...+\frac{1}{1+2+3+4+5...+51}$$

pode ser escrita como sendo

$$2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+....+2\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{52}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{52}\right)=2\left(\frac{26-1}{52}\right)=\frac{25}{26}$$

Problema 2
Arrumam-se nove quadrados para formar um retângulo, veja figura a seguir.



O menor dos quadrados tem lado com comprimento 1.
Qual é a área do retângulo?
Solução

Seja A o menor quadrado, de lado medindo 1. Vamos denotar por b o comprimento do lado do quadrado B, por c o comprimento do lado do quadrado C, ..., por i o comprimento do lado do quadrado I.
Assim, podemos escrever: b = 1 + g e c = 1 + b. Ou seja, c = 2 + g.
Por outro lado, f = g – 1 e c + 1 = f + e.

Logo, e = c + 1 – f = c + 1 – (g – 1) = 2 + c – g = 2 + 2 + g – g = 4. Ou seja, **e = 4**.
Como d + i = (c + e) + (d + e), temos que, cancelando d, i = c + 2e.
Logo, d + i = (c + e) + (c + 2e).
Portanto, temos que d + i = 2c + 3e = 2c + 3.4 = 2c + 12. Ou seja, **d + i = 2c + 12.**

Por outro lado, como a figura maior é um retângulo, podemos escrever:

d + i = b + g + h = (1 + g) + g + (f + g) = (1 + g) + g + (g – 1 + g) =
= 4g = 4(c – 2) = 4c – 8.

Mas, então temos:
d + i = 2c + 12 e d + i = 4c – 8.
Logo, 2c + 12 = 4c – 8 e, portanto, c = 10.
Assim, g = 8, b = 9, f = 7, h = 15, d = 14, i = 18.
Portanto, a área do retângulo é igual a (b + g + h).((i + h) = 32.33 = 1056.

Problema 3
Encontre um número natural n para o qual o número inteiro $2^8+2^{10}+2^n$ seja um quadrado perfeito.
Solução

Uma idéia é completar quadrados. Assim, podemos escrever
$$2^8+2^{10}+2^n=\left(2^4\right)^2+2.2^4.2^5+2^n=\left(2^4\right)^2+2.2^4.2^5+\left(2^5\right)^2-\left(2^5\right)^2+2^n=\left(2^4+2^5\right)^2-2^{10}+2^n$$

Portanto, uma resposta seria n = 10.

Problema 4
Seja m um número inteiro positivo. Sabendo-se que a equação $\frac{8}{3}x-m=\frac{9}{4}x+123$ admite um inteiro positivo como solução, encontre o valor mínimo possível para o número m.
Solução

Multiplicando cada lado da equação dada por 12, obtemos

$$\frac{8}{3}x-m=\frac{9}{4}x+123\Rightarrow 32x-12m=27x+1476\Rightarrow 12m=5x-1476\Rightarrow m=\frac{5x}{3}-123>0\,.$$

Ou seja, m é um inteiro positivo para o qual

$$m=\frac{5x}{12}-123>0\Rightarrow 5x>1476\Rightarrow x>\frac{1476}{5}\cong 295,2\,.$$

Por outro lado, $m=\frac{5x}{12}-123$ é um número inteiro, o que significa dizer que $5x$ é um número inteiro divisível por 12. Ou seja, x é um número inteiro divisível por 12, pois

MDC(5, 12) = 1. Mas, o menor múltiplo de 12 que é maior do que 295 é 300. Logo, $x =$ 300 e $m = \frac{5.300}{12} - 123 = 125 - 123 = 2$.

Problema 5
Na tabela abaixo, os números *a, b, c, d, e, f* são números racionais e a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são todas iguais.

a	*b*	6
c	*d*	*e*
f	7	2

Encontre o valor de: $a + b + c + d + e + f$.
Solução

Comparando a soma dos números na diagonal que vai do canto superior direito para o canto inferior esquerdo do tabuleiro com os números da terceira linha, temos
$f + d + 6 = f + 7 + 2 \Rightarrow d = 3$.
Comparando os números da diagonal que vai do canto superior esquerdo para o canto inferior direito do tabuleiro com os números da terceira linha, temos
$a + d + 2 = a + 3 + 2 = f + 7 + 2 \Rightarrow a = f + 4$.
Comparando os números da terceira coluna com os da terceira linha, temos
$e + 8 = f + 9 \Rightarrow e = f - 1$.
Comparando os números em ambas as diagonais, temos:
$f + d + 6 = a + d + 2 \Rightarrow f = a + 2 - 6 = a - 4$. Portanto, $e = f + 1 = a - 4 + 1 = a - 3$
Comparando a soma dos números da segunda linha com a soma dos números da primeira coluna, temos:
$a + c + f = c + d + e \Rightarrow a + f = d + e \Rightarrow d + a - 3 = a + f \Rightarrow d - 3 = f$.
Substituindo esses valores na soma dos números na diagonal que vai do canto inferior esquerdo para o canto superior direito, que é a mesma soma dos números na terceira coluna, temos:
$f + d + e = 6 + e + 2 \Rightarrow f + 3 + f + 6 = 6 + e + 2 \Rightarrow 2f + 9 = 8 + e = 8 + f + 1$.
Assim, $f = 0$. Substituindo nas equações acima, vamos encontrar os valores restantes:

4	-1	6
5	3	1
0	7	2

Portanto, a soma
$a + b + c + d + e + f = a + b + c + d + e + f = 4 + (-1) + 5 + 3 + 1 + 0 = 12.$

Problema 6
Sejam *a, b, c* números reais. Encontre o menor valor possível para a expressão:

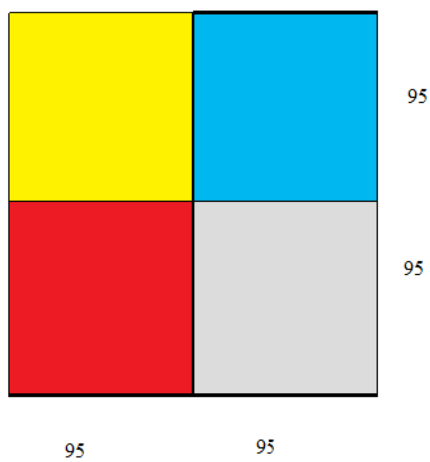
$$E = 3a^2 + 27b^2 + 5c^2 - 18ab - 30c + 237.$$

Solução

Podemos escrever a expressão E como sendo
$E = 3a^2 + 27b^2 + 5c^2 - 18ab - 30c + 237 = 3(a^2 - 6ab) + 5(c^2 - 6c) + 27b^2 + 237$, ou ainda
$E = 3(a^2 - 6ab + 9b^2) + 5(c^2 - 6c + 9) + 27b^2 + 237 - 27b^2 - 45$, que é o mesmo que
$E = 3(a-3b)^2 + 5(c-3)^2 + 192$. Como $3(a-3b)^2 \geq 0$ e $5(c-3)^2 \geq 0$, o menor valor possível da expressão E é quando $3(a-3b)^2 = 0$ e $5(c-3)^2 = 0$. Portanto, o menor da valor da expressão E é 192.

Problema 7
Diga, justificando, se é possível pintar um tabuleiro 190 x 190 com as cores branco e preto de modo que, em cada linha e em cada coluna, a metade dos quadrados unitários sejam pretos e quadrados simétricos com relação ao centro tenham cores opostas.
Solução

A resposta é não.
Divida o tabuleiro em quatro quadrados, cada um deles com 95 linhas e 95 colunas, veja figura a seguir.



Suponha que no quadrado superior esquerdo (quadrado amarelo) existam b quadrados unitários pretos. Logo, neste quadrado, o número de quadrados unitários brancos é igual a $95^2 - b$. Assim, de acordo com os dados do problema, no quadrado inferior direito (quadrado cinza), o número de quadrados unitário pretos é igual $95^2 - b$ e o número de quadrados brancos é b.
Como a metade dos quadrados unitários em cada linha do tabuleiro é preto, então a metade dos quadrados unitários nas primeiras 95 linhas do tabuleiro são pretos. Portanto, o número de quadrados unitários pretos no quadrado superior direito (quadrado azul) é igual a $95.\frac{190}{2} - b = 95^2 - b$.
Por outro lado, a metade dos quadrados unitários em cada coluna é preto. Logo, a metade dos quadrados unitários localizados na metade direita do tabuleiro é preto.
Portanto, temos que $(95^2 - b) + (95^2 - b) = 95^2$. Ou seja, $b = \frac{95^2}{2}$, o que é impossível, pois b é um número inteiro e 95 não é divisível por 2.

Problema 8

Um livro contém 30 contos. Cada conto possui um número diferente de páginas abaixo de 31. O primeiro conto começa na página 1 e cada conto começa numa nova página. Qual é o maior número possível de contos que podem começar numa página de número ímpar?

Solução

O maior número possível de contos que podem começar numa página de número ímpar é 23.

Para ver isso, chamemos de *conto ímpar* aquele conto que tiver um número ímpar de páginas e, de modo análogo, *conto par* todos conto com um número par de páginas.

Como todos os contos tem números distintos de páginas, existem 15 contos pares e 15 contos ímpares.

Agora observe que cada *conto ímpar* (porque tem um número ímpar de páginas) tem a propriedade de que o conto imediatamente após ele começa numa página de paridade distinta da que ele próprio começa. Por outro lado, os *contos pares* não tem esta propriedade. Portanto, os *contos ímpares* tem de começar alternadamente numa página ímpar e numa página par. Logo, como são 15 os *contos ímpares*, 8 deles começam numa página ímpar e 7 deles começam numa página par, independentemente de como os contos são arrumados no livro.

Podemos arranjar os contos de modo que todos os *contos ímpares* estejam ao final do livro, antes dos *contos pares*. Deste modo, o primeiro *conto par* começa na página 1 e termina numa página de número par (pois ele tem um número par de páginas), o que significa que o conto imediatamente depois começa numa página ímpar, o que obriga o conto imediatamente após terminar começar numa página ímpar, e assim por diante. Deste modo, o número de contos que começa numa página ímpar é igual a 15 + 8 = 23.

Problema 9

Diga, justificando (sem usar uma calculadora), qual é o maior dos números: 31^{11} ou 17^{14}.

Solução

O número 17^{14} é maior do que 31^{11}

Observe que $17^2 = 289 > 279 = 9.31$. Ou seja, $17^2 > 9.31$. Assim, elevando ambos os membros da desigualdade à sétima potência, temos $17^{14} > 9^7.31^7$.

Agora, observe que $3^7 = 2187 > 961 = 31^2$ e $9^7 = \left(3^2\right)^7 = \left(3^7\right)^2 > \left(31^2\right)^2 = 31^4$.

Portanto, $17^{14} > 9^7.31^7 > 31^4.31^7 = 31^{11}$.

Problema 10

Em torno de um círculo, existem K lâmpadas, numeradas no sentido horário de 1 a K. Inicialmente, nenhuma lâmpada está acesa. A operação seguinte é permitida para cada divisor d do número K (1 e K estão incluídos): começando a partir da lâmpada numerada com 1 e movendo-se no sentido horário, altera-se o estado de cada lâmpada de d em d lâmpadas, e isto é repetido exatamente K vezes.

(Por exemplo, se K = 6 e d = 3, são alterados os estados das lâmpadas 3, 6, 3, 6, 3, 6).

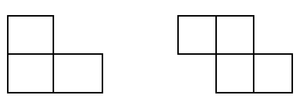
Depois de se completar essa operação para todos os divisores de K, para quais valores de K estarão todas as lâmpadas acesas?

Solução

Para todo K = 2^s, onde s é um número inteiro não negativo.
Para cada divisor de K, o estado de todas as lâmpadas que são numeradas com seus divisores são alteradas (se a lâmpada está acesa, apaga-se; se a lâmpada está apagada acende-se), e somente essas lâmpadas.

Como de tais lâmpadas existe uma quantidade igual a $\frac{K}{d}$ e são feitas exatamente K alterações, o estado de cada lâmpada é mudado exatamente d vezes.
Em particular, para $d = 1$, o estado de cada lâmpada é alterado pelo menos uma vez.
Para se ter no final todas as lâmpadas acesas, o estado de cada lâmpada tem de ser alterado um número ímpar de vezes, pois no inicio todas estão apagadas.
Agora, observe que o estado de uma lâmpada numerada com um número m, com $1 \leq m \leq K$, é mudada pelo divisor 1 e por cada divisor d, maior do que 1, de K que é divisor de m. E, sabe-se, seu estado é alterado d vezes.
É fácil ver que a condição é satisfeita quando todos os divisores d de K forem pares. Ou seja, $K = 2^s$, onde s é um inteiro não negativo.
Suponha agora que K tenha um divisor, q, ímpar maior do que 1 e que q seja o menor deles. Sabe-se que o estado da lâmpada numerada com q é alterado uma vez pelo divisor 1, q vezes o divisor q e zero vezes para todos os outros divisores de K, pois esses outros divisores não dividem q, pois q é o menor divisor de K. Portanto, o estado da lâmpada numerada com q é alterado um número par de vezes e, consequentemente, a lâmpada não estará acesa no final.
Assim, $K = 2^s$, onde s é um inteiro não negativo.

Problema 11
Para quais números naturais n é possível cobrir todos os quadrados unitários de um retângulo de ordem 3 x n com figuras formadas a partir de quadrados unitários da formas seguintes e sem sobreposição?



Solução
Imagine o retângulo 3 x n como abaixo.

					....			
					....			
					....			

Para cada quadrado unitário do retângulo dado, associe o número 1 ou -1 como mostrado abaixo.

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**.......**	**1**	**1**	**1**
-1	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**.......**	**-1**	**-1**	**-1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**.......**	**1**	**1**	**1**

A soma dos números dos quadrados cobertos pela primeira figura é ou 1 ou -1 e a soma dos números nos quadrados cobertos pela segunda figura é sempre zero.

Agora, observe que a soma total dos números associados a todos os quadrados do retângulo é n. Isto significa que não podemos usar todos iguais aos da segunda figura e no mínimo n ao todo. É fácil ver que podemos cobrir todos os quadrados unitários de um retângulo de ordem $3 \times n$ com figuras formadas a partir de quadrados unitários da formas seguintes e sem sobreposição se n é um inteiro positivo par.