
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 04 - Data 01/04/2013

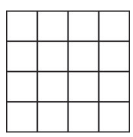
NÍVEL I

Um professor de Matemática desenha um quadrado de lado 4 numa folha branca e pede a um estudante para marcar quinze pontos na região limitada pelo quadrado. Em seguida, ele recorta do quadrado marcado um quadrado de lado 1cm, sem conter qualquer um dos pontos marcados pelo estudante.

O professor sempre consegue recortar o quadrado de lado 1cm, sem conter qualquer um dos pontos marcados, independente de como o aluno marque os pontos?

SOLUÇÃO

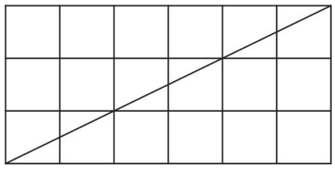
A resposta é sim. Basta ele dividir o quadrado em 16 quadrados unitários, veja Figura a seguir.



Esses quadrado não se sobrepõem, de modo que um único ponto não pode ser colocado em dois quadrados distintos. Como são marcados 15 pontos e existem 16 quadrados unitários, existe no mínimo um deles sem ponto. Esse é o qudrado que o professor recorta.

NÍVEL II

Uma diagonal de um tabuleiro 3×6 passa por quatro vértices dos quadrados unitário, veja Figura seguir.



Por quantos vértices passa a diagonal de um tabuleiro 45×30?

SOLUÇÃO

Como um tabuleiro 45×30 tem os lados do bordo na proporção $3 : 2$, olhamos inicialmente para ver o que acontece num tabuleiro 3×2. É fácil ver que aí uma diagonal passa por 2 vértices. Agora, no tabuleiro 45×30 só precisamos olhar para os quinze tabuleiros 3×2 por onde passa a diagonal. Desses, o tabuleiro 3×2 mais abaixo à esquerda tem seu vértice mais à esquerda, e mais abaixo, inferior sobre a diagonal, e cada um dos outros tabuleiros 3×3 tem um vértice adicional, em seu canto superior à direita, para a contagem. Isso nos dá um total de $1 + 15 = 16$ vértices na diagonal.

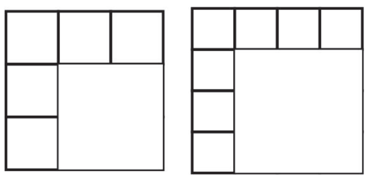
NÍVEL III

Numa sala de aula, o professor de Matemática desenha um quadrado numa folha e recorta-o em 8 quadrados. Joãzinho, um estudante aplicado, afirma que pode fazer isso não somente para 8 quadrados mas, para uma quantidade qualquer de quadrados n, com $n \geq 6$.

Prove que Joãozinho está certo. Isto é, prove que todo quadrado desenhado numa folha de papel pode ser recortado em n quadrados, para $n \geq 6$.

SOLUÇÃO

Seja S o quadrado dado. Para qualquer inteiro positivo k, com $k \geq 2$, podemos dividir o quadrado em k^2 quadrados menores, como um tabuleiro $k \times k$. Se nesse tabuleiro apagamos todas as divisões dos quadrados unitários que formam um tabuleiro de dimensão $(k-1) \times (k-1)$, situados na parte inferior à direita do tabuleiro, vamos obter um quadrado T, de dimensão $(k-1) \times (k-1)$ que junto com os $2k-1$ quadrados unitários restantes, situados na primeira linha e primeira coluna do tabuleiro constituem uma decomposiçãode do tabuleiro S em $2k$ quadrados. A Figura a seguir ilustra os casos em que $k = 3$ e $k = 4$.



Além disso, podemos dividir o quadrado T em 4 quadrados, o que aumenta a divisão do quadrado S para $2k-1+4=2k+3$ quadrados menores. Como ≥ 2 é arbitrário, é sempre possível dividir o quadrado S em n quadrados, para $n \geq 6$, como queríamos provar.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Você está num barco localizado exatamente no centro de um lago perfeitamente redondo, de raio r. Há um duende na margem do lago. O duende quer lhe fazer maldades. Ele não sabe nadar e não dispõe de um barco. Desde que você consiga chegar à margem - e o duende não esteja lá, esperando para agarrá-lo -, você sempre corre mais do que ele em terra e consegue fugir. O duende anda quatro vezes mais rápido do que seu barco. Ele tem visão perfeita, nunca dorme e é extremamente lógico. Fará todo possível para pegar você.

Como você fugiria do duende?

SOLUÇÃO

Pelos dados do problema, o duende rastreia com precisão todos seus movimentos e tenta permanecer o mais próximo possível de você. Para destabilizá-lo, descreva um círculo de raio pequeno mais ou menos no meio do lago. Deste modo, o duende vai enloquecer, Ele vai querer dar a volta no lago todo, enquanto seu barco estará completando um círculo de poucos metros. Assim, o duende não vai conseguir acompanhá-lo, pois o círculo que ele tem de percorrer tem o raio muito maior do que o seu. Como o duende é quatro vezes mais rápido que seu barco, se vocês descreve um círculo de raio menor do que $\frac{r}{4}$ em sentido horário, o duende correrá em sentido horário a velocidade máxima para se manter próximo de você. Se você descreve um círculo de raio menor do que $\frac{r}{4}$ em sentido anti-horário, o duende correrá em sentido anti-horário a velocidade máxima para se manter próximo de você. Dessa forma, aos pouco ele ficará para trás. Isso significa que você pode se afastar a $\frac{5}{4}r$ do duende. Você pode executar seu plano movendo-se em espiral, a partir do centro do lago, aproximando-se do raio $\frac{r}{4}$ sem alcançá-lo. Como você permanece dentro deste círculo encantado, o duende não conseguirá alcançá-lo. Continue fazendo isso até deixá-lo 180 graus para trás. Nesse ponto, o barco estará no lado oposto ao do duende, e você se encontra a $\frac{1}{4}$ do raio ou $\frac{1}{8}$ do diâmtero. Pare de andar em círculo repentinamente e dirija-se à margem em linha reta. Você só precisa percorrer a distância de $\frac{3}{4}r$. Aí o duende precisa cobrir $\pi \times r$. Isso é $\frac{4\pi}{3}$ maior, e como oduende é quatro vezes mais rápido, faz o percurso em $\frac{\pi}{3}$ vezes seu tempo. Acontece que $\frac{\pi}{3}$ é ligeiramente maior do 1. Ou seja, $\frac{\pi}{3} \approx 1,047\cdots$. Portanto, quando você desembarcar e começar a correr o duende ainda não apareceu, o que garante que você fugirá. Observe que, mesmo que o duende saiba qual é seu plano, ele não poderá impedir sua fuga.