Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 05 - Data 08/04/2013

NÍVEL I

O aparelho de televisão de Joãozinho possui os canais de 3 até 48, inclusive. Se está no canal 48 e aperta uma só vez o botão de mudança de canais no sentido crescente, vai para o canal 3.

Se Joãozinho está no canal 19 e aperta o botão de mudança de canais no sentido crescente 623 vezes, em que canal ele vai parar?

SOLUÇÃO

O aparelho de televisão de Joãozinho tem 46 canais. Toda vez que ele aperta o botão de mudança de canais no sentido crescente 46 vezes ele volta para a posição que estava. Como $623 = 13 \times 46 + 25$, se ele está no canal 19 e aperta o botão de mudança de canais no sentido crescente 623 vezes, ele volta 13 vezes ao canal 19 e avança 25 canais, parando no canal $25 + 19 = 44$.

NÍVEL II

Diga, justificando, se o seguinte sistema de equações admite soluções nos números reais.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y \\ y + \frac{1}{y} = z \\ z + \frac{1}{z} = x \end{cases}$$

SOLUÇÃO

Como $xyz \neq 0$, podemos escrever o sistemna dado como:

$x^2 + 1 = xy, \quad y^2 + 1 = yz, \quad z^2 + 1 = xz$

Multiplicando membro a membro as três equações acima, obtemos
$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) = x^2 y^2 z^2$.

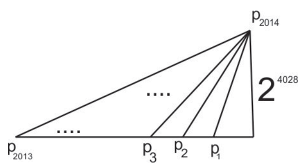
Mas, para números reais x, y, z, temos que $x^2 + 1 > x^2, \quad y^2 + 1 > y^2, \quad z^2 + 1 > z^2$.
Portanto, o sistema não admite solução.

NÍVEL III

Diga, justificando, se é possível encontrar 2014 pontos do plano cartesiano, nem todos numa mesma reta, tais que a distância entre dois quaisquer deles seja um número inteiro positivo.

SOLUÇÃO

A resposta é sim. Existem 2014 pares (n, m), com n, m inteiros positivos e $m > n$ tais que $2mn = 2^{4028}$. De fato, o conjunto $\{(2^0, 2^{4027}), (2^1, 2^{4026}, \cdots, (2^{2013}, 2^{2014})\}$, tem 2014 pares ordenados e em cada um deles as coordenadas satisfazemm a igualdade
$2mn = 2^{4028}$. Assim, existem 2014 ternos da forma $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, com m, n inteiros positivos e $m > n$, onde cada terno pode ser entendido como comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, pois $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$. Pela escolha dos números n, m, em cada triângulo, existe um lado que mede 2^{4028}. Agora, traçamos uma reta, arranjamos convenientemente os 2013 pontos nela, $p_1, p_2, \cdots, p_{2014}$ e mais um, p_{2014}, acima dela, situado a uma distância de 2^{4028} da reta. A seguir, ligamos por um segmento cada ponto sobre a reta com o ponto fora dela. Esses segmentos, de comprimentos inteiros, serão as hipotenusas dos correspondentes triângulos retângulos formados, veja Figura a seguir.



A distância entre quaisquer pontos sobre a reta é um número inteiro. Isto completa nossa prova.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Calcule a integral $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2K+1)\theta}{\sin\theta} d\theta$, onde K é um inteiro não negativo.

SOLUÇÃO

A resposta é π. Chamemos de $f(K) = \frac{\sin(2K+1)\theta}{\sin\theta}$. Agora, temos que $f(K+1) - f(K) = \frac{\sin(2K+3)\theta - \sin(2K+1)\theta}{\sin\theta}$.

O numerador da fração acima pode ser escrito como:
$\sin(2K+3)\theta - \sin(2K+1)\theta = \sin(2k+1)\theta\cos 2\theta + \cos(2K+1)\theta\sin 2\theta - \sin(2K+1)\theta =$
$= \sin(2K+1)\theta(\cos 2\theta - 1) + \cos(2K+1)\theta\sin 2\theta = = -2\sin(2K+1)\theta(\sin\theta)^2 + 2\cos(2K+1)\theta\sin\theta\,\mathrm{co}$
$= 2\sin\theta[\cos(2K+1)\theta\cos\theta - \sin(2K+1)\theta\sin\theta] = 2\sin\theta\cos(2K+2)\theta$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(K+1)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(K)d\theta =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2K+2)\theta d\theta = 0$$

Isto significa que $f(K) = f(0) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = \pi$.