Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,**

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

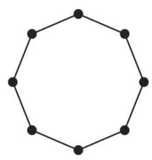
Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

LISTA SEMANAL No. 06 - Data 15/04/2013

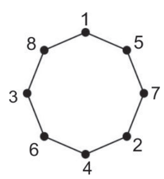
NÍVEL I

Diga, justificando, se é possível colocar os números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ nos vértice de um octógono regular de tal maneira que a soma de quaisquer três números vizinhos seja maior do que 11? E sendo a soma maior do que 13?



SOLUÇÃO

Para a primeira pergunta, a resposta é sim. Coloque os números, no sentido horario, na seguinte ordem: $1, 5, 7, 2, 4, 6, 3, 8$:



Para a segunda pergunta, a resposta é não. Suponha o contrário, que seja possível, e que os números sejam arranjados no sentido horário na sequência a, b, c, d, e, f, g, h. Pelas hipóteses do problema, teríamos as seguintes desigualdades:

$$a+b+c \geq 14;\ b+c+d \geq 14$$
$$c+d+e \geq 14;\ d+e+f \geq 14$$
$$e+f+g \geq 14;\ f+g+h \geq 14$$
$$g+h+a \geq 14;\ h+a+b \geq 14$$

Somando, membro a membro, todas as desigualdades, teríamos
$3(a+b+c+d+e+f+g+h) = 3(1+2+3+4+5+6+7+8) = 3\times 36 = 108 \geq 8\times 14 = 112$. Contradição. Portanto, é impossível colocar os números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ nos vértice de um octógono regular de tal maneira que a soma de quaisquer três números vizinhos seja maior do que 13.

NÍVEL II

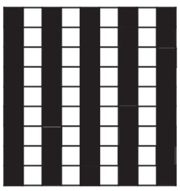
Em cada quadrado unitário de um tabuleiro 9×9, há uma formiga. Dado um sinal, cada formiga caminha ao longo de uma diagonal para um quadrado que compartilha um vértice com o quadrado da formiga. Após este movimento, alguns quadrados unitários acabam ficando com mais de uma formiga e alguns quadrados unitários ficam vazios.

Encontre o número mínimo possível de quadrados unitários vazios.

SOLUÇÃO

A resposta é 9.

Uma solução aparece naturalmente quando pintamos convenientemente o tabuleiro dado. Assim, pintamos as colunas do tabuleiro, da esquerda para direita, alternadamente de preto e branco, veja Figura a seguir.



Com a pintura obtemos um total de 45 quadrados unitários pretos e 36 brancos, 9 menos que a quantidade dos pretos. Como as formigas se movimentam diagonalmente em cada quadrado unitário, as formigas que estão em quadrados brancos passam para quadrados pretos e vice-versa. Deste modo, no mínimo 9 quadrados ficarão vazios. Um exemplo dos movimentos que deixam exatamente 9 quadrados vazios é aquele em que cada formiga caminha para próxima coluna à direita, com exceção da última coluna à direita, na qual todas as formiga caminham para a coluna à sua esquerda.

NÍVEL III

Dentre todas os arranjos de números inteiros positivos cuja soma seja 8, qual é o maior produto que esses números podem ter?

SOLUÇÃO

A resposta é 18.

Uma possibilidade seria ter somente um número, no caso, o 8, cujo produto seria 8. Vamos mostrar que podemos encontrar arranjos com produto maior do que 8. É claro que não é vantajoso ter qualquer inteiro igual 1, pois o 1 contribui para a soma, mas não para o produto. Por outro lado, não devemos ter qualquer número 5, pois pode ser substituído por 2 e 3, cuja soma é 5 e o produto é 6, portanto, maior do que 5. Do mesmo modo, não deve ter 6, pois, para aumentar o produto sem alterar a soma, podemos substituí-lo por dois 3, cuja soma é igual a 6, mas o produto é maior. Também não deve ter 7, pois, assim, teríamos, necessariamente, o 1, pois a soma deles é 8 e 1 não contribui para o produto. É fácil ver que dentre os números inteiros positivos não deve ter 4, pois podemos substituí-lo por dois números 2, cuja soma é a mesma e o produto é igual a 4. Concluímos que os inteiros devem conter somente números 2 e 3. Mas, com somente 2 e 3 os possíveis casos são: $2+2+2+2=8$ ou $2+3+3=8$. Nestes dois casos possíveis, os produtos dos números são: $2\times2\times2\times2=8$ ou $2\times3\times3=18$. Portanto, o maior produto dos números é 18.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Prove que a sequência $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$, para todo inteiro $n\geq 1$, é convergente.

SOLUÇÃO

Observe que a sequência é crescente: $a_1\leq a_2\leq a_3\leq\cdots$. Com isso, basta mostrar que a sequência é limitada (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Vamos mostrar que $a_n<2\sqrt{2}$, para todo $n\geq 1$.

Para isso, na sequência dada, vamos colocar em evidência $\sqrt{2}$. Isto é,

$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{4}+\sqrt{\frac{3}{8}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}}}<$$

$$<\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots\sqrt{1}}}}.$$

Agora, seja $b_n = \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots\sqrt{1}}}}$, onde existem n raizes quadradas. Assim, $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$. É fácil ver que $b_1 = 1 < 2$, e se $b_n < 2$, então $b_{n+1} < \sqrt{1+2} < 2$. Com isso, por indução, segue que $b_n < 2$, para todo inteiro $n \geq 1$. Portanto, $a_n < 2\sqrt{2}$, para todo inteiro $n \geq 1$. Logo, a sequência é monótona e limitada. Portanto, a sequência dada é convergente.