Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 07 - Data 22/04/2013

NÍVEL I

Dados dez pontos sobre um círculo, dois jogadores, A e B, disputam um jogo, em que jogam alternadamente. O primeiro a jogar é o jogador A. Uma jogada consiste em desenhar um segmento de reta ligando esses pontos. Um jogador não pode desenhar um segmento de reta que encontre outro segmento no interior do círculo. Um segmento só pode encontrar outro segmento nos seus extremos. O último que seja capaz de desenhar um segmento vence o jogo.

Considerando que ambos os jogadores fazem suas melhores jogadas, quem vence: A ou B? Qual a estratégia para vencer?

SOLUÇÃO

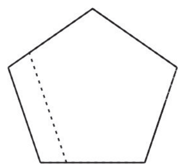
O jogador A, o primeiro a jogar, vence. O fato importante é que existem um número par de pontos, no caso dez, sobre o círculo. O primeiro jogador desenha um segmento ligando dois pontos de modo que o circulo fique dividido em duas partes, de tal maneira que, em cada uma dela tenha o mesmo número de pontos, no caso quatro. A cada jogada de B, o jogador desenha o segmento simétrico em relação ao primeiro segmento. Com isso, o jogador A faz a última jogada, vencendo o jogo.

NÍVEL II

Todos os ângulos de um pentágono dado tem a mesma medida. O pentágono é necessariamente regular?

SOLUÇÃO

A resposta é não. Um pentágono é regular se tem todos os lados de mesmo comprimentos e todos os ângulos de mesma medida. Desenhe num papel um pentágono regular e recorte-o. Agora, no pentágono, desenhe um segmento de reta parelelo a um de seus lados e recorte um pedaço do pentágono ao longo desse segmento de reta, veja a Figura a seguir.



Após o corte, o pentágono resultante terá cinco ângulos com a mesma medida, pois o corte foi feito paralelo ao lado do pentágono regular, mas não terá todos os lados de mesmo comprimento.

NÍVEL III

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada de A consiste em colocar um X em qualquer quadrado unitário livre de um tabuleiro infinito, desenhado numa folha de papel. Uma jogada de B consiste um colocar um 0 em qualquer quadrado unitário livre do tabuleiro infinito. O jogador A vence se ele coloca 100 $X's$ adjacentes numa linha ou coluna do tabuleiro infinito.

O jogador B pode impedir o jogador de vencer?

SOLUÇÃO

A resposta é não. O jogador B não pode impedir A de vencer. A estratégia de A é a seguinte. Ele escolhe 2^{100} linhas distintas e para as primeiras 2^{99} jogadas ele coloca um X em cada linha. Depois do mesmo número de jogadas, o jogador B pode colocar 0 em no máximo a metade dessas linhas, de modo que a outra metade das 2^{100} linhas ficam livre de $0's$. Durantes as próximas 2^{98} jogadas, o jogador A coloca X em cada um dos dos quadrados livres das linhas próximas daquelas onde ele já havia colocado um X, quando isto for possível. Assim, na metade dessas 2^{99} linhas ele conseguirá colocar dois $X's$ próximo (ou adjacentes ou em diagonal), pois o jogador só poderá ocupar com 0 no máximo a metade das linhas. Depois que A fizer as próximas 2^{97} jogadas, ele terá no mínimo 2^{97} linhas cada uma delas contendo três $x's$ adjacentes. Prosseguindo deste modo, o jogador A consegue colocar 100 $X's$ em quadrados unitários adjacentes ou em diagonal, vencendo o jogo.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Sejam S a conjunto de todos os números da forma $2^m 3^n$, onde m e n são números inteiros e $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos números reais positivos.

O conjunto S é denso em $\mathbb{R}^+$?

SOLUÇÃO

A resposta é sim. Como a função logaritmica e a sua inversa, a função exponecial, são contínuas, podemos reformular a questão perguntando se o conjuntos dos números da forma $mlog2 + nlog3$, com m e n números inteiros, é denso em $\mathbb{R}$

A pergunta reformulada é um caso particular do seguinte teorema, que demonstramos depois:

TEOREMA 1 - Se α e β são números reais, então os números da forma $m \cdot \alpha + n \cdot \beta$, com m e n números inteiros, são densos em $\mathbb{R}$, a menos que existam números inteiros p e q ambos não nulos tais que $p \cdot \alpha + q \cdot \beta = 0$

De fato, no nosso caso temos: $\alpha = \log 2$ e $\beta = \log 3$. Tomando as exponenciais na igualdade $p \cdot \alpha + q \cdot \beta = 0$, obtemos $e^{p \cdot \alpha + q \cdot \beta} = e^0 = 1$, que é equivalente a $2^p 3^q = 1$, para números inteiros p e q, ambos não nulos. Mas, a última igualdade é impossível, pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Logo, não existem números reais α e β tais que $p \cdot \alpha + q \cdot \beta = 0$. Portanto, pelo Teorema 1, S é denso em $\mathbb{R}^+$.

Antes de provar o Teorema 1 vamos provar o Teorema 2 a seguir:

Teorema 2 - Se H é um subgrupo do grupo aditivo dos números reais. $(\mathbb{R}, +)$, então ou $H = 0$ ou H consiste de todos os múltiplos inteiros de algum número a ou H é denso em $\mathbb{R}$.

Prova do Teorema 2 - Suponha que $H \neq 0$. Segue que H possui um número real b não nulo. Como b e $-b$ estão em H, podemos concluir que H possui números reais positivos.

Suponha que H tenha um menor número positivo a.

Provaremos que H consiste de todos os múltiplos inteiros de a. Como H é um subgrupo e a está em H, segue que todos os múltiplos inteiros de a estão em H. Agora seja $y \in H$. Logo, existe um inteiro n tal que $n \leq \frac{y}{a} < n + 1$. Assim, $z = y - na \in H$ e $0 \leq z < a$. Como a é o menor elemento de de H, segue que $z = 0$, o que implica $y = na$. Portanto, H consiste de todos os múltiplos inteiros de a

Suponha que H contém números positivos, mas não um menor número real positivo a.

Seja $I = (b, b + \delta)$ um intervalo aberto em $\mathbb{R}$. Como H possui infinitos elementos no intervalo $(0, a)$, dois deles, digamos t_1 e t_2, com $\mid t_2 - t_1 \mid < \delta$. Podemos supor que $t_1 < t_2$. Assim, $s = t_2 - t_1$ está em H e $0 < s < \delta$. Todos os múltiplos de s estão no intervalo I, e algum múltiplo de s pertence ao intervalo I, deste modo $H \cap I \neq \phi$. Como I é arbitrário, H é denso em $\mathbb{R}$. Com isso, provamos o Teorema 2. Prova do Teorema 1 - Os números da forma $m\alpha + n\ \ \beta$ constituem um subgrupo, H, de $(\mathbb{R}, +)$, e $\alpha \in H$ e $\ \ \beta \in\ H$. Suponha que H não seja denso em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 2, H consiste de todos os múltiplos inteiros de algum número real não negativo a. Digamos que $\alpha = qa, \quad \beta = -px$, onde p, q são inteiros. Então $p\alpha + q\ \ \beta = 0$. Se $p = q = 0$, então $\alpha = \ \ \beta = 0$ e o Teorema 1 se verifica.