Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 08 - Data 29/04/2013

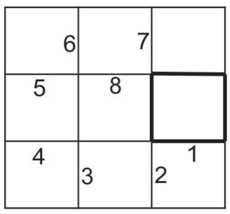
NÍVEL I

Um apartamento tem a forma de um tabuleiro 3×3 dividido por paredes em quartos quadrados, cada um deles de dimensões 1×1. Existe uma porta nas paredes entre dois quartos adjacentes, e normalmente essas portas estão fechadas. Existe um gato dentro de um dos quartos.

Encontre o menor número de portas que tem de ser abertas para permitir o gato passear por todo o apartamento.

SOLUÇÃO

No início, o gato está num quarto e não pode ir para qualquer um dos 8 quartos porque as portas estão fechadas. Marquemos as portas que desejamos abrir, e comece abrindo-as em sequência, para que cada nova porta aberta leva o gato de um quarto a outro. Em cada etapa, o gato passa para não mais do que um quarto. Portanto, temos que abrir no mínimo 8 portas. A Figura, a seguir, mostrar o gato em um quarto e uma sequência de 8 portas abertas que permitiriam ele passar por todos os 8 quartos.

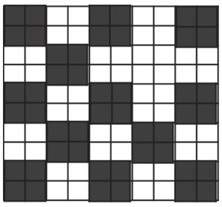


NÍVEL II

Diga, justificando, se uma sala quadrada 10×10 pode ser ladrilhada com ladrilhos retangulares de dimensões 4×1.

SOLUÇÃO

A resposta é não. A solução fica facilitada quando interpretamos a sala como um tabuleiro 10×10. Agora, dividimos o tabuleiro em 25 quadrados 2×2 e pintamos os mesmos, alternadamente, branco e preto, veja figura a seguir.



Observe que cada ladrilho retangular 4×1 cobre exatamente dois quadrados unitários brancos e dois pretos. Se fosse possível ladrilhar a sala com os ladrilhos especificados, teríamos tantos ladrilhos brancos como ladrilhos pretos. Mas, na nossa pintura, existem quantidades distintas deles. Portanto, é impossível ladrilhar a sala dada com ladrilhos retangulares de dimensões 4×1.

NÍVEL III

Uma bola de gude foi colocada na extremidade direita de uma faixa 1×20, com todos os quadrados unitários numerados de 1 até 20. Dois jogadores, A e B, disputam um jogo, em que jogam alternadamente. O jogador A começa os movimentos. Um movimento consiste em deslocar a bola para a esquerda ou para a direita para um dos quadrados da faixa que não foi utilizado antes por qualquer dos jogadores. O vencedor é o último a fazer um movimento.

Qual dos jogadores, A ou B, pode sempre vence, independente de como o opositor jogue, e qual a sua estratégia?

SOLUÇÃO

O primeiro jogador, A, vence. Sua primeira jogada é mover a bola de gude 19 posição à esquerda, para o quadrado de número 1. Depois disso, ele move a bola de gude para o final possível da faixa na direção onde seu oponente moveu na sua última jogada.

Vamos provar que, com essa estratégia, o jogador A vence. Suponha que o jogador B moveu a bola de gude para um quadrado possível x. O jogador teria que mover para um quadrado possível, numerado com um número diferente de x. Agora, observe que os números x e $19 - x$ são números diferentes e distintos de zero, pois eles possuem paridades distintas e $x \neq 0$. Além disso, o quadrado $19 - x$ ainda não foi visitado, pois, caso contrário, o quadrado $19 - (19 - x) = x$ já teria sido visitado antes, o que não é o caso. Com isso, concluímos que A sempre vai poder mover depois de B, portanto, vencendo o jogo.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Esmeralda passeia pelos pontos de coordenadas inteiras do plano. Se, num dado momento, ela está no ponto (a, b), com um passo ela pode ir para um dos seguintes pontos: $(a+1, b)$, $(a-1, b)$, $(a, b+1)$ ou $(a, b-1)$.

De quantas maneiras Esmeralda pode sair do $(0, 0)$ e andar 2008 passos terminando no $(0, 0)$?

SOLUÇÃO

A resposta é $\binom{2008}{1004}^2$. A seguir, vamos apresentar duas soluções para o problema.

PRIMEIRA SOLUÇÃO

Cada movimento de subida ($\uparrow$) deve ser compensado por um movimento de descida ($\downarrow$), e cada movimento para a esquerda ($\leftarrow$) deve ser compensado por um movimento para a direita ($\rightarrow$). Assim, se fizermos k movimentos $\uparrow$, temos que fazer também k movimentos $\downarrow$, $1004-k$ movimentos $\leftarrow$ e $1004-k$ movimentos $\rightarrow$. Para cada k, o número de caminhos é, portanto, igual ao número de anagramas com 4 letras distintas, duas aparecendo k vezes e as outras duas, $1004-k$ vezes cada. Logo a resposta é:

$$R=\sum_{k=0}^{1004}\frac{2008!}{k!k!(1004-k)!(1004-k)!}=\sum_{k=0}^{1004}\frac{2008!}{1004!1004!}\cdot\frac{1004!}{k!(1004-k)!}\cdot\frac{1004!}{k!(1004-k)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{1004}\binom{2008}{1004}\binom{1004}{k}^2$$

Considere agora um conjunto de n meninos e n meninas. De quantas maneiras podemos escolher um grupo de n crianças? Por um lado, a resposta é $\binom{2n}{n}$ maneiras distintas.

Por outro lado, se escolhermos k meninos temos $\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}=\binom{n}{k}^2$ maneiras de formar um grupo. Logo,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

e, portanto, $R=\binom{2008}{1004}^2$.

SEGUNDA SOLUÇÃO

Esmeralda tem $\binom{2008}{1004}^2$ maneiras de escolher dois conjuntos de 1004 passos dentre os 2008 passos que andará: o conjunto X dos passos para cima ou para a direita ($\uparrow$ *ou* $\rightarrow$) e o conjunto Y dos passos para baixo ou para a direita ($\downarrow$ *ou* $\leftarrow$). Essas escolhas determinam unicamente todos os passos: O conjunto dos passos para a direita será $X\cap Y$ para a esquerda será $X^c\cap Y^c$ para cima $X\cap Y^c$ e para baixo $X^c\cap Y$ (onde X^c e Y^c denotam os complementares de XeY, respectivamente). Se $\mid X\cap Y\mid=k$, teremos $\mid X^c\cap Y\mid=1004-k$, $\mid X\cap Y^c\mid=1004-k$ e $\mid X^c\cap Y^c\mid=k$. Assim, a resposta é $\binom{2008}{1004}^2$.