
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 10 - Data 13/05/2013

NÍVEL I

Annie possui $R\$500,00$ na sua conta bancária. O banco permite somente duas espécies de operações: retirada de exatos $R\$300,00$ ou depósitos de exatos $R\$198,00$. Annie não tem outros recursos, a não ser o que está na sua conta.

Qual é a maior quantia que Annie pode sacar de sua conta?

SOLUÇÃO

A resposta é 498. A idéia aqui é observar que tanto 300 como 198 são divisíveis por 6. Isto significa que Annie só pode retirar múltiplos de 6 e o maior múltiplo de 6 não superior a 500 é 498. E ela pode retirar 498 com os seguintes movimentos:
$500 - 300 = 200$, $200 + 198 = 398$, $398 - 300 = 98$, $98 + 198 = 296$, $96 + 198 = 494$.
Realizando todas estas operações, a conta decresce de 6 reais. Agora, repetindo esse processo 16 vezes, Annie retirará 96 reais de sua conta, ficando com $500 - 96 = 404$ reais. Em seguida, ela retira 300, deposita 198 e retira 300, deixando na conta:
$404 - 300 + 198 - 300 = 2$. Portanto, retirou 498 reais.

NÍVEL II

Escrevem-se dois números no quadro-negro de um laboratório. Todo dia, ao meio-dia, um pesquisador apaga os dois números e os substitui pela suas médias aritmética e harmônica. Os números escritos na manhã do primeiro dia foram 1 e 2.

Encontre o produto de todos os números escritos no quadro-negro no final do 2013-ésimo dia.

Observação: A Média Aritmética e a Média Harmônica de dois números a e b são $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, respectivamente.

SOLUÇÃO

No final do 2013-ésimo dia o produto dos números de todos escritos no quadro-negro é o mesmo que o produto dos números escritos no primeiro dia: $1 \times 2 = 2$. De fato, o produto não muda com o passar dos dias, pois:

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b} = ab$$

.

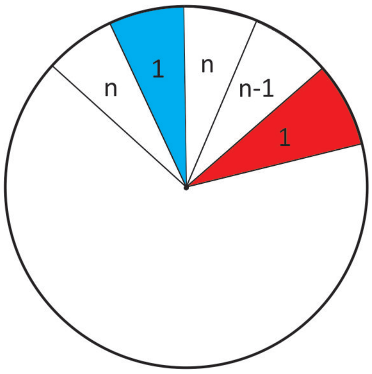
NÍVEL III

Traçando raios, divide-se um disco em $2n$ setores circulares congruentes, n deles são pintados de azul e n pintados de vermelho. Escolhe-se dois desses setores circulares, um azul e um vermelho. Começando com o setor circular azul escolhido, numera-se de 1 a n, no sentido anti-horário, os setores circulares azuis. De maneira análoga, começando com o setor circular vermelho escolhido, numera-se de 1 a n, no sentido anti-horário, os setores circulares vermelhos.

Prove que, independente da escolha da cor dos setores circulares, existe uma metade do disco que possúi todos os números de 1 até n.

SOLUÇÃO

Chamaremos os números de vermelho ou azul, de acordo com a cor do setor circular em que ele está escrito. Formamos os pares de números iguais, de cores distintas. Consideramos o par de números iguais que estejam mais próximos, considerando o menor dos arcos entre os dois. Sem perda de generalidade, podemos supor que o par de números mais próximos seja aquele formado por $(1, 1)$, pois fazendo girar, no sentido anti-horário, todos os números, até que o mais próximo seja efetivamente o par $(1, 1)$. Podemos supor que, no sentido anti-horário, o primeiro 1 do par seja vermelho, enquanto o segundo 1 do par seja azul. Desse modo, entre os dois $1's$ só existem números de mesma cor, azuis, por exemplo, pois, caso contrário eles não seriam o par mais próximo. Agora, trace o diâmetero separando o número 1 azul dos outros vizinhos, veja Figura a seguir.



Mostraremos que esse diâmetero é o que queremos para resolver nosso problema. Considere a metade do disco contendo o número 1 azul. Os números azuis dessa metade do disco, vistos no sentido anti-horário, vão de 1 até um certo número natural s. Agora, olhe para todos os números vermelhos, no sentido anti-horário. Como não há números vermelhos no arco ligando os dois números $1's$, os números vermelhos são $n, n-1, \cdots, n-m$, onde m é também um número inteiro positivo. Desse modo, existem s números azuis e $m+1$ números vermelhos nesta metade do disco. Como existem n números nesta metade do disco, temos que $s+(m+1)=n$. Isto é, $n-m=s+1$. Portanto os números na metade do disco são os azuis de 1 a s e os vermelhos de n até $s+1$. Juntos, eles formam todos os números de 1 até n, cada deles aparecendo uma vez.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$g(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt.$$

Mostre que se a função g não é crescente, então f é identicamente nula.

SOLUÇÃO

Considere a seguinte função $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $G(x) = \left[\int_0^x f(t)dt\right]^2$. A função G satisfaz:

$$g'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t)dt$$

Como $G'(0) = 0$ e $G'(x) = g(x)$ não é crescente, segue que $G'(x) \geq 0$, para todo x no intervalo $(-\infty, 0)$ e $G'(x) \leq 0$, para todo x no intervalo $(0, \infty)$. Isto implica que G não decresce em $(-\infty, 0)$ e não cresce em $(0, \infty)$. Combinado estes duas conclusões com os fatos de que $G(0) = 0$ e $G(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, implica que $G(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $\int_0^x f(t)dt = 0$. Deferenciando em relação a x, concluímos que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos provar.