
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 11 - Data 20/05/2013

NÍVEL I

Você tem 16 cartões de mesmas dimensões, numerados na ordem decrescente: $16, 15, 14, \cdots, 3, 2, 1$. Você deseja colocá-los na ordem crescente, $1, 2, 3, \cdots, 14, 15, 16$, alterando somente dois cartões adjacentes por vez.

Qual é o número mínimo de movimentos necessários?

SOLUÇÃO

A resposta é 120. Observe que o cartão 16 tem de ser movido para seu lugar na ordem crescente 15 vezes. O cartão 15 tem de ser movido para seu lugar na ordem crescente 14 vezes, $\cdots$, o cartão 2 tem de ser movido 1 vez e o cartão 1 nãoprecisa ser movido. Portanto, o número mínimo de movimentos é igual a $15 + 14 + 13 + \cdots + 2 + 1 = 120$.

NÍVEL II

Temos 27 caixas em fila; cada uma delas contém pelo menos 12 bolinhas. A operação permitida é transferir uma bolinha de uma caixa para sua vizinha da direita, se essa vizinha da direita tem mais bolinhas. Dizemos que uma distribuição é *feliz* se é possível, mediante uma sucessão de operações permitidas, fazer com que todas as bolinhas fiquem numa mesma caixa.

Determine o menor número total de bolinhas de uma distribuição inicial feliz.

SOLUÇÃO

A resposta é 1000, que se alcança com a distribuição $12, 13, 15, 17, \cdots, 59, 61, 63$, onde os números consecutivos diferem por 2, exceto entre os dois primeiros números, o 12 e 0 13.

Esta sucessão satisfaz as hipóteses do problema, pois em cada caixa há pelo menos 12 bolinhas. Cada bolinha da primeira caixa pode "'viajar"' até a última caixa. Uma vez esvaziada a primeira caixa, cada bolinha da segunda caixa pode chegar até a última caixa, e, procedendo deste modo, esvaziam-se as caixas uma a uma e colocam-se todas as bolinhas na última caixa.

Como as bolinhas não retrocedem, se o objetivo é alcançado, todas as bolinhas devem terminar na última caixa à direita. Além disso, para que todas as caixas apareçam em alguma operação permitida, as quantidades iniciais de bolinhas nas caixas formam uma sucessão crescente de números. Consideramos qualquer distribuição que permita atingir o objetivo e uma sucessão de operações permitidas com as quais se levem todas as bolinhas até a última caixa.

Sejam $12 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{27}$ a sucessão das quantidades iniciais de bolinhas nas caixas. Suponhamos que existem caixas consecutivas, a_i e a_{i+1} tais que $a_{i+1} = a_i + 1$; a um par de caixas com essas características chamamos de *par especial*. Para um par especial, a primeira operação em alguma das caixas i ou $i+1$ está ligada uma a outra, porque se junta ou se diminui uma bolinha, caso contrário, não seria possível continuar o processo. Em particular, isto implica que não poderíamos ter como pares especiais $i, i+1$ e $i+1, i+2$. Assim, podemos efetuar primeiro todas as operações que envolvam os pares especiais, e depois realizar as operações restantes. Existe uma excessão: se as caixas 1 e 2 constituem um para especial e $a_1 = 12$, não realizamos neste momento a operação com essas caixas. Este fato garante-nos que cada caixa contém pelo menos 12 bolinhas depois de efetuar a operação nos demais pares especiais.

Fixemos nossa atençao na sucessão $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{27}$ que obtivemos ao realizar as operações permitidas com os pares especiais. As operações restantes fazem com que todas as bolinhas terminem na última caixa, e $b_1 \geq 12$; logo esta distribuição é permitida. Além disso, $b_2 \geq b_1 + 1$ e $b_{i+1} \geq b_i + 2$, para $i = 2, 3, 4, \cdots, 26$. Além disso, como se supôs que havia pelo menos uma operação com pares especiais, temos que $b_{i+1} = b_i + 3 > b_i + 2$ para pelo menos um índice i, istoa contece porque depois de aplicarmos a operação a um par especial $i, i+1$, a diferença $a_{i+1} - a_i$ se transforma em 3.

Então podemos dizer que temos uma distribuição permitida com a mesma quantidade total de bolinhas que a original, em que cada número b_i seja ao menos tão grande quanto o número correspondente na sucessão $12, 13, 15, 17, \cdots, 59, 61, 63$ do primeiro parágrafo. Além disso, ao menos um b_i é estritamente maior. Concluímos que, se há pares especiais, então o número total de bolinhas não é mínimo.

Portanto, basta olhar as distribuições tais que $12 \leq a_1 \leq a_2 - 1$ e $a_i \geq a_i + 2$, para $i = 2, 3, 4, \cdots, 26$. Entre todas elas, é claro que o mínimo se alcança se $12 = a_1 = a_2 - 1$ e $a_{i+1} = a_i + 2$, para $2 \leq i \leq 26$. Isto nos conduz à sucessão $12, 13, 15, 17, \cdots, 59, 61, 63$ cuja soma é $12 + \frac{13+63}{2} \cdot 26 = 1000$.

NÍVEL III

Escolhe-se um conjunto de inteiros positivo de maneira tal que entre 2013 inteiros positivos consecutivos no mínimo um número é escolhido.

Mostre que, não importa que escolha se faça, existem dois números escolhidos com um dividindo o outro.

SOLUÇÃO

Defina $A(1, i) = i$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, 2013$. Para $k \geq 2$, defina $B(k) = A(k-1, 1) \cdot A(k-1, 2) \cdot A(k-1, 3) \cdots A(k-1, 2012) \cdot A(k-1, 2013)$ e defina $A(k, i) = B(k) + A(k-1, i)$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, 2013$. Como $B(k)$ é múltiplo de $A(k-1, i)$, segue que $A(k, i)$ também é múltiplo de $A(k-1, i)$. Isto significa que: se $m < n$ então $A(n, i)$ é um múltiplo de $A(m, i)$.

Por indução sobre k, podemos concuir que $A(k, 1), A(k, 2), A(k, 3), \cdots, A(k, 2012), A(k, 2013)$ são inteiros consecutivos. Logo, para $k = 1, 2, 3, \cdots, 2014$, dentre os números $A(k, 1), A(k, 2), A(k, 3), \cdots, A(k, 2012), A(k, 2013)$, existe um número escolhido $A(k, i_k)$. Como $1 \leq i_k \leq 2013$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, dois dos $i_k's$ são iguais. Portanto, entre os números escolhidos existem dois com um dividindo ooutro.

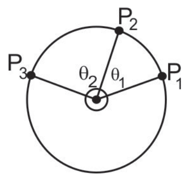
NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Três pontos são escolhidos aleatoriamente sobre o círculo unitário com centro na origem O. Qual é a probabilidade de que esses três pontos estejam sobre um semicírculo?

SOLUÇÃO

A resposta é $\frac{3}{4}$. Sejam P_1, P_2, P_3 os três pontos escolhidos aleatoriamente. O espaço para a possível escolha de qualquer um desses três pontos é o círculo unitário de centro na origem. Logo, o espaço de todas as escolhas possíveis dos três pontos será o produto do três círculos, e o volume deste espaço é igual a $2\pi \times 2\pi \times 2\pi = 8\pi^3$.

Agora, vamos medir o volume da configuração (P_1, P_2, P_3) de modo que o arco $P_1\hat{P}_2P_3$ esteja num semicírculo e orientado no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio de P_1 para P_3. A condição para que o arco esteja contido num semicírculo é que $0 \leq \angle P_1OP_2 \leq \pi$ e que $0 \leq \angle P_2OP_3 \leq \pi - \angle P_1OP_2$, veja Figura a seguir.



Escolhe-se, aleatoriamente, o ponto P_1 sobre o círculo dado e para cada desses P_1 escolhido a região dos ângulos θ_1 e θ_2 tais que $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ e $0 \leq \theta_2 \leq \pi - \theta_1$ é um triângulo retângulo isósceles de perímetro π. Portanto, a região dos pontos P_1, P_2, P_3 sob as condições acima possui volume igual a $2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi^2$. Agora, existem $3! = 6$ regiões possíveis, dependendo da ordem como os pontos P_1, P_2, P_3 são tomados, e essas regiões são disjuntas. Portanto, a medida da região favorável é o volume dado por $6\pi^3$. Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{6\pi^3}{8\pi^3} = \frac{3}{4}$.