Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 12 - Data 27/05/2013

NÍVEL I

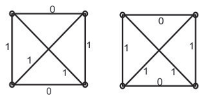
Um professor de Matemática propõe o jogo seguinte para dois estudantes, A e B, no qual eles jogam alternadamente. O jogador A começa o jogo. O professor desenha numa folha de papel 8 pontos, de modo que três deles não estejam numa mesma reta. Uma jogada para A consiste em numerar com um dígito um segmento juntando dois desses pontos. Uma jogada para B consiste em numerar um ponto com um dígito. O jogador A vence se existe um segmento numerado com o mesmo dígito que seus extremos. Caso contrário, o jogador A perde.

Mostre que o jogador A tem uma estratégia para vencer o jogo.

SOLUÇÃO

Observe que, com os 8 pontos dados, pode-se formar 28 segmentos. (De fato, cada um dos 8 pontos pode ser ligado a qualquer um dos 7 pontos restantes. Como são 8 os pontos, teremos 8×7 segmentos, mas desse modo, contamos cada segmento duas vezes, pois, para efeito de contar a quantidade dos segmentos, o segmento AB, de extremos A e B, é o mesmo que o segmento BA, Portanto, o número de segmentos que se pode traçar com 8 pontos, três quaisquer não alinhados, é igual a $\frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 28$).

Como $8 = 2^3$, podemos numerar os pontos e os segmentos com os dígitos $0, 1$ e 2. O jogador A numera 12 dos 28 segmentos como na figura a seguir e os 16 segmentos restantes numerar com o número 2.



Com isso, o jogador B perde. De fato, considere o conjunto dos 4 pontos do desenho à esquerda na figura. Um dos dois pontos acima, o jogador B, para evitar que A vença, tem de numerar com um dígito diferente de 0. Nos dois pontos abaixo, o jogador B tem de escrever um dígito diferente de 0. Se ambos os números foram numerados com o dígito 1, o jogador A atinge seu objetivo e B perde. Portanto, um desses dois pontos tem de ser numerado com o dígito 2. Um argumento semelhante mostra que um dos quatro pontos do desenho à direita tem de ser numerado com o dígito 2. Mas, agora temos dois pontos numerados com o dígito 2, o que implica que o jogador B perde. Isso conclui nossa prova.

NÍVEL II

Mostre como você pode distribuir os números inteiros positivos de 1 a 34 colocando um em cada vértice e um em cada ponto médio dos lados de um polígono regular de 17 lados, de modo que a soma dos números ao longo de cada lado do polígono seja constante.

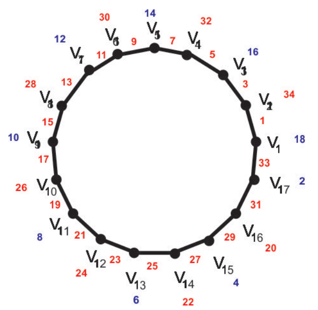
SOLUÇÃO

Começando de um vértice qualquer do polígono, numeramos, no sentido anti-horário, os vértices: $V_1, V_2, V_3, \cdots, V_{17}$. Nesse sentido, consideramos $V_1 = V_{18}$ e chamamos de M_k o ponto médio do lado que liga o vértice V_k ao vértice V_{k+1}.

Para cada $k = 1, 2, 3, \cdots, 17$, associamos o número $2k - 1$ ao ponto médio M_k. Para cada $k = 1, 2, 3, \cdots, 9$, associamos o inteiro $2k$ ao vértice V_{19-2k}, e para cada $k = 10, 11, \cdots, 17$, associamos o inteiro $2k$ ao vértice V_{36-2k}.

Desse modo, ao ponto médio M_j associamos o valor $2j - 1$, ao vértices V_{2j} associamos o valor $36 - 2j$ e ao vértices V_{2j+1} associamos o valor $18 - 2j$.

Agoar, vamos calcular a soma dos números associados ao lado que liga $V_{2j}M_{2j}V_{2j+1}$. O número associado ao vértice V_{2j} é igual a $36 - 2j$; o número associado ao ponto médio $M_{2j} = M_{2(2j)-1}$ é igual a $4j - 1$. O número associado ao vértice V_{2j+1} é igual a $18 - 2j$.Portanto, a soma dos número associado ao lado $V_{2j}M_{2j}V_{2j+1}$ é igual a $(36 - 2j) + (4j - 1) + (18 - 2j) = 53$. De maneira análoga, a soma dos números associados ao lado que liga $V_{2j+1}M_{2j+1}V_{2j+2}$ é igual a: $(18 - 2j) + (4j + 1) + (34 - 2j = 53$. Como j é arbitrário, concluímos a prova de que nossa distribuição satisfaz ao problema. Veja, na figura a seguir, a distribuição dos numeros.



NÍVEL III

Tem-se um tabuleiro $n \times n$, com $n > 100$. Escrevem-se em $n-1$ quadrados unitários do tabuleiros o número 1 e nos restantes escreve-se o número 0. Uma operação permitda é escolher um quadrado unitário, subtrair 1 do número escrito nele e somar 1 a todos os números escritos na sua linha e coluna.

Aplicando sucessivas vezes a operação permitida, é possível tornar iguais todos os números escritos no tabuleiro?

SOLUÇÃO

A resposta é não. Olhamos para o resto da divisão por 3 de todos os números escritos no tabuleiro. Seja a_{ij} o número escrito na $i-$ésima linha e $j-$ésima coluna. Afirmamos que o número $C = a_{ij} - a_{kj} + a_{km} - a_{im}$ tem o resto na divisão por 3 constante quando se aplica a operação permitida. É fácil ver que, se um dos números for escolhido para se aplicar a operação, o valor da expressão C cresce ou decresce por 3, o que implica que o resto da divisão de C por 3 não se altera. Se nenhum dos quatro números, $a_{ij}, a_{kj}, a_{km}, a_{im}$ for escolhido para realizar a operação, o valor da expressão C não muda.

Agora, como, por hipótese, existem $(n-1)$ números 1's no tabuleiro, uma linha, digamos w, tem todas as suas casas compostas por zeros e uma outra, digamos x, possui entre 1 e $n-1$ números 1's escritos. Deste modo, existem quatros números $a_{wy} = 0$, $a_{xy} = 0$, $a_{xz} = 1$ e $a_{wz} = 0$. Assim, o número $a_{wy} - a_{xy} + a_{xz} - a_{wz}$ deixa resto 1 na divisão por 3, o que nos garante que esses números não poderão ser iguais, caso contrário, $a_{wy} - a_{xy} + a_{xz} - a_{wz}$ seria divisível por 3, que é uma contradição. Portanto, com a aplicação da operaçãp permitida sucessivas vezes, não é possível tornar iguais todos os números escritos no tabuleiro.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Diga, justificando, se o número

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$$

é racional.

SOLUÇÃO

A resposta é não. Inicialmente, observe que a série dada é convergente, pois é limitada superiormente pela série geométrica com razão $\frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Suponha que o número $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ seja racional. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \frac{a}{b}$, com a, b números inteiros com $b \neq 0$.

Escolha n de tal modo que $b < 2^n$. Assim, temos:

$$\frac{a}{b} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k^2}} = \sum_{k \geq n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$$

Mas, a soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k^2}} = \frac{m}{2^{n^2}}$, para algum inteiro m. Portanto, temos:

$$\frac{a}{b} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k^2}} = \frac{a}{b} - \frac{m}{2^{n^2}} > \frac{1}{2^{n^2} b} > \frac{1}{2^{n^2+n}} > \frac{1}{2^{(n+1)^2-1}} = \sum_{k \geq (n+1)^2}^{\infty} \frac{1}{2^k} > \sum_{k \geq (n+1)}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$$

A última desigualdade é uma contradição. Isto mostra que o valor da série dada é um número irracional.