Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 13 - Data 03/06/2013

NÍVEL I

Numa lista, ordenam-se, em ordem crescente, os números inteiros positvos que não sejam quadrados perfeitos:

$$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \cdots$$

Encontre o 100-ésimo número dessa lista.

SOLUÇÃO

Como de 1 até 110 existem dez quadrados perfeitos, $1, 2, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$, o 100-ésimo número da lista é 110.

NÍVEL II

O produto de três inteiros pares consecutivos é $87 * * * * * 8$, onde os asteriscos representam cinco números que faltam.

Qual é a soma dos três números pares?

SOLUÇÃO

A resposta é 1332. Sejam $n-2, n, n+2$ os três números pares consecutivos. Temos que: $(n-2)\cdot n\cdot(n+2) = n^3 - n = 87*****8$. Por outro lado,
$(n-2)\cdot n\cdot(n+2) = n^3 - n \approx n^3 > 87*****8$. Segue que $n = 444$. Assim, os três números são $442, 444$ e 446. Portanto, $442+444+446 = 1332$.

NÍVEL III

Em que situações podemos trocar as posições dos ponteiros de um relógio (que tem ponteiros das horas e dos minutos) e continuar obtendo uma hora possível? Mostre que esse é um fenômeno periódico e calcule seu período.

SOLUÇÃO

Se x é um número real, vamos denotar por $[x]$ o maior inteiro que é menor do que ou igual a x. Por exemplo, $[2,8] = 2, [1,5] = 1, [\sqrt{2}] = 1, [4] = 4$. Sejam α e β os ângulos que os ponteiros das horas e dos minutos, respectivamente, fazem com o eixo das 12 horas às h horas e m minutos.

Temos $\beta = 6m$ e $\alpha = 30h + \frac{m}{2}$. Note que h é um inteiro com $0 \le h < 12$ e m é um real com $0 \le m < 60$. Temos então $\beta = 12(\alpha - 30[\frac{\alpha}{30}])$.

Se pudermos trocar as posições dos ponteiros, devemos ter $\alpha = 12(\beta - 30[\frac{\beta}{30}])$, ou seja, $30h + \frac{m}{2} = 12(6m - 30[\frac{m}{5}])$, ou seja, $m = \frac{60(h+12[\frac{m}{5}]}{143}$. Sendo $k = h + 12[\frac{m}{5}]$, temos então $m = \frac{60k}{143}$ e $h = k - 12[\frac{m}{5}] = k - 12[\frac{12k}{143}]$. Como $0 \le m < 60$, devemos ter $0 \le k < 143$. Note que, nesse caso, $[\frac{12k}{143}] = [\frac{k}{12}]$, pois

$$\frac{k}{12} \le \frac{12k}{143} \quad e \quad \frac{12k}{143} - \frac{k}{12} = \frac{k}{12.143} < \frac{1}{12} \quad quando\ 0 \le k < 143.$$

Assim, temos as 143 soluções: tal fenômeno ocorre às $k - 12[\frac{k}{12}] = k - 12[\frac{12k}{143}]$ horas e $\frac{60k}{143}$ minutos, para cada inteiro k com $0 \le k < 143$. Note que $0 \le k - 12[\frac{k}{12}] < 12$, para todo inteiro k.

Para ver que esse é um fenômeno periódico, note que se $0 \le k - 130$, o evento associado a k ocorre ás $k - 12[\frac{k}{12}]$ horas e $\frac{60k}{143}$ minutos, enquanto o evento associado a $k+12$ ocorre às

$$k + 12 - 12[\frac{k+12}{12}] = k + 12 - 12([\frac{k}{12}] + 1) = k - 12[\frac{k}{12}] \quad horas \quad e \quad \frac{60(k+12)}{143} \quad minutos.$$

Ou seja, $\frac{60.12}{143} = \frac{720}{143}$ minutos depois. Por outro lado, se $0 \le h \le 10$ então o evento associado a $k = h + 12.11 = h + 132$ ocorre às $h + 132 - 12[\frac{h+132}{12}] = h + 132 - 12[\frac{h}{12} + 11] = h + 132 - 12.11 = h$ horas e $\frac{60(h+132)}{143}$ minutos, enquanto o evento associado a $k = h+1$ ocorre às $h + 1 - [\frac{h+1}{12}] = h+1$ horas e $\frac{60(h+1)}{143}$ minutos, ou seja, $60 - \frac{60(h+132)}{143} + \frac{60(h+1)}{143} = \frac{60.12}{143} = \frac{720}{143}$

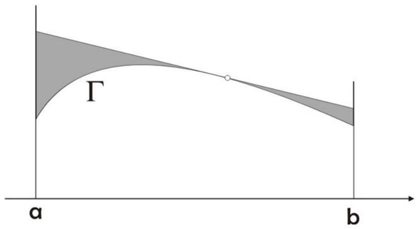
minutos depois. Assim, o fenômeno é periódico com período $\frac{720}{143}$ minutos = 5 minutos e $\frac{300}{143}$ segundos = 5 minutos e $2,097902097902\cdots$ segundos, associado à seguinte sequência de valores de $k: 0, 12, 24, \cdots, 132, 1, 13, 25, \cdots 133, \cdots, 10, 22, 34, \cdots, 142, 11, 23, 35, \cdots, 131$ (note que o evento associado a $k = 131$ ocorre às 11 horas e $\frac{60.131}{143} = 60 - \frac{60\Delta 12}{143}$ minutos, isto é, $\frac{720}{143}$ minutos antes do relógio marcar novamente 0 horas 0 minutos, o evento associado a $k = 0$).

Obs.: Os ponteiros se superpõem às h horas e $\frac{60h}{11}$ minutos, para $0 \leq h \leq 10$. Esses casos correspondem a tomar $k = 13h$ em nossa expressão das soluções.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

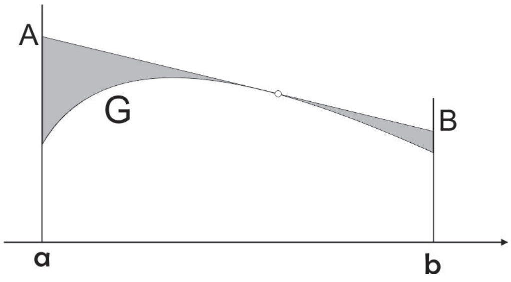
Seja Γ uma curva que representa graficamente uma função diferenciável e côncava $f\ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Mostre que o ponto do domínio em que a reta tangente à curva Γ minimiza a área sombreada da figura a seguir é o ponto médio do intervalo $[a, b]$



SOLUÇÃO

A área sombreada, S, é igual a diferença entre as áreas do trapézio AabB e a área sob a curva Γ, de a até b, veja figura a seguir.



Assim, temos $S = \acute{A}rea(AabB) - \int_a^b \Gamma(t)dt$. Como a área sob a curva Γ é constante, a área S será mínima quando a área do trapézio $AabB$ for mínima. Mas, a área do trapezio é dada por $\frac{Aa+bB}{2} \times (b-a)$, onde $\frac{Aa+bB}{2}$ é a altura média do trapézio. Portanto, a área S será mínima quando a altura média do trapézio for mínima, ou seja, quando o ponto de tangência for no ponto médio de $[a, b]$.