Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 14 - Data 10/06/2013

NÍVEL I

A média de idade de um time de futebol (que tem 11 jogadores) é de 22 anos. Durante um jogo, um jogador machucou-se e foi obrigado a deixar o campo. A média de idade dos 10 jogadores restantes tornou-se 21 anos.

Qual era a idade do jogador que machucou-se?

SOLUÇÃO

Como a média das idades dos 11 jogadores do time é 22 anos, a soma das idades de todos os jogadores é igual a $11 \times 22 = 242$ anos. Depois que o jogador machucado saiu, a soma das idades dos 10 jogadores restantes é igual a $10 \times 21 = 210$ anos. Portanto, a idade do jogador machucado é igual a $242 - 210 - 32$ anos.

NÍVEL II

Preenchem-se as casas de um tabuleiro 8×8 com números reais, de modo que as casas dos quatro cantos do tabuleiro sejam ocupadas com o número 0 e todo número escrito no tabuleiro é menor do que ou igual a média aritmética de seus vizinhos. Uma casa é vizinho de outra se elas possuem um lado em comum.

Encontre todos os números escritos nas casas do tabuleiro.

SOLUÇÃO

Inicialmente, observe que foram escritos um total de 64 números nas casas do tabuleiro. Deste modo, existe um número que é o maior deles. Seja M o maior número no tabuleiro, que está escrito em alguma casa. Como M é o maior número no tabuleiro, todos os seus vizinhos são menores do que ou iguais a ele. Por outro lado, a média aritmética de seus vizinhos é igual a M. A única forma de isto ser possível é se todos os vizinhos de M forem iguais a ele. De modo análogo, podemos concluir que todos os vizinhos dos vizinhos de M são iguais a M também. Daí concluímos que todos os números escritos no tabuleiro são iguais a M. Como, por hipótese, o número 0 está escrito no quatro cantos do tabuleiro, então $M = 0$, e todo número escrito no tabuleiro é igual a 0.

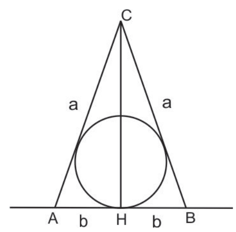
NÍVEL III

Dado um círculo de raio r, é possível desenhar dois triângulos não congruentes e de mesma área, ambos circunscritos ao círculo dado?

SOLUÇÃO

Vamos mostrar que, dado um círculo com raio r, existem dois triângulos isósceles não congruentes, circunscritos ao círculo dado, e de áreas iguais.

É fácil ver que, existe um triângulo isósceles circunscrito a um círculo, veja Figura a seguir.



Observe que, se os comprimentos dos lados do triângulo isósceles são $a, a, 2b$, para o círculo de raio r, podemos escolher os valores de a e b na proporção $a : b = 3 : 1$. De fato, para um triângulo isósceles com lados medindo $a, a, 2b$ com $a : 2b = 3 : 2$, inscrevemos nele um círculo e fazemos a figura crescer até o raio do círculo atingir o valor r. Sem perda de generalidade, podemos supor que o valor de b seja 1.

Sabemos que a expressão da área de um triângulo ABC em termos do raio do círculo inscrito é dada por $\acute{A}rea(\Delta ABC) = r \times s$, onde s é a metade do perímetro do triângulo. Com isso, podemos concluir que, para um dado valor do raio igual a r, se dois triângulos tem a mesma área então eles possuem o mesmo perímetro. Vamos construir um segundo triângulo isósceles usando este fato.

Seja $A'B'C'$ um triângulo isóceles cujos lados tem comprimentos a', a', b'. Sejam $2b' = 2 + 2x$ e $a' = 3 - x$. Com queremos que os dois triângulos tenham a mesma área e mesmo perímetro, temos que:

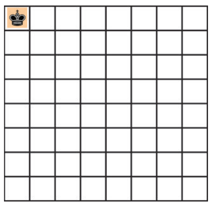
$$\acute{A}rea(\Delta ABC) = \acute{A}rea(\Delta A'B'C') \Longleftrightarrow \frac{1}{2}2b \times h = \frac{1}{2}(2+2x)\sqrt{(3-x)^2 - (1+x)^2} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{8} = (1+x)\sqrt{8-8x}$$

Como $x \neq 0$, a equação acima nos dá $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Logo, a base do segundo triângulo isósceles é igual a $2b' = 2(1+x) = \sqrt{5}+1$ e os dois lados de mesmo comprimento igual a $a' = 3 - x = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$

É fácil ver que tal triângulo isósceles existe e possui a mesma área e perímetro do ΔABC. Portanto, o raio do seu círculo inscrito tem de ser o mesmo que o raio do círculo inscrito em ΔABC, como queríamos provar.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Coloca-se o rei negro no canto superior esquerdo do tabuleiro 8×8, veja Figura a seguir. Dois jogadores, A e B, disputam um jogo. Uma jogada consiste em movimentar o rei. Só é permitido movimentar o rei para uma casa que ainda não foi ocupada em movimentos anteriores. Os jogadores jogam alternadamente e o jogador A inicia o jogo. O primeiro jogador que não puder fazer sua jogada perde.



(a) Quem vence: o jogador A ou o jogador B? Qual é a estratégia vencedora?
(b) Se o tabuleiro for 7×7? E 8×7?

SOLUÇÃO

(a) O jogador A vence. Mentalmente, o jogador A divide o tabuleiro 8×8 em retângulos 2×1 e, olhando para o retângulo em que o rei negro se encontra, ele o movimenta para o outro quadrado do retângulo. Esta estratégia do jogador A leva para as seguintes três situações:

(i) Depois de seu movimento todo retângulo se apresenta de um do dois modos seguintes:

(1) O rei não esteve em qualquer quadrado do retângulo;

(2) O rei já esteve em ambos os quadrados do retângulo;

(ii) O jogador B terá que se movimentar para um retângulo que ainda não foi visitado;

(iii) Por (ii), o jogador A pode dar prosseguimento à sua estratégia porque o outro quadrado do retângulo não foi ainda visitado.

Como temos um número finito de retângulos, em algum instante o jogador B não poderá se movimentar e o jogador A vence.

(b) No caso do tabuleiro $7 times 7$, o jogador B mentalmente elimina a casa do canto esquerdo superior do tabuleiro e divide as 6 casas restantes na primeira linha em retângulos 1×2 e cobre as casas restantes do tabuleiro com retângulos 2×1. Agora ele aplica exatamente a mesma estratégia seguida pelo jogador A no caso anterior, vencendo a partida.

(c) No caso do tabuleiro 8×7 o jogador A vence aplicando a mesma estartégia do caso (a).