
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 15 - Data 17/06/2013

NÍVEL I

Num certo dia, um jornal local se apresentou com 26 páginas. Suponho que você puxou uma folha e soltou-a no chão. Uma das páginas viradas para você estava numerada com 19.

Quais são os outros número das páginas nessa folha?

SOLUÇÃO

Como o jornal tinha 26 páginas, a folha externa tem páginas numeradas com $1, 2, 25$ e 26. A próxima folha mais externa tem páginas numeradas com $3, 4, 23$ e 24. A próxima folha tem páginas numeradas com $5, 6, 21$ e 22. Finalmente, a folha que nos interessa tem páginas numeradas com $7, 8, 19$ e 20. Como 19 você já viu, os outros números das páginas são: 7, 8 e 20.

NÍVEL II

Pinta-se cada número inteiro positivo, $1, 2, 3, 4, \cdots$, com uma das cores vermelho ou azul, de modo que a pintura satisfaça as seguintes condições:

(a) A soma de três números vermelho, não necessariamente distintos, é um número vermelho.

(b) A soma de três números azul, não necessariamente distintos, é um número azul.

(c) Existe no mínimo um número pintado de azul e um número pintado de vermelho.

Encontre todas as pinturas possíveis satisfazendo estas condições.

SOLUÇÃO

Seja V o conjunto de todos os números pintados de vermelhos e A a coleção de todos os números pintados de azul.

Sejam a, b dois números interios positivos tais que $a \neq b$, $a \in V$, $b \in A$. É fácil ver que:

$$(i) \quad a + a + a = 3a, \quad a + a + 3a = 5a, \quad a + a + 5a = 7a, \cdots \in V$$

$$(ii) \quad b + b + b = 3b, \quad b + b + 3b = 5b, \quad b + b + 5b = 7b, \cdots \in A$$

Como consequência, os conjuntos V e A são infinitos.

Agora, suponha que $1 \in V$. Neste caso, V contém todos os números inteiros positivos ímpares. Vamos mostrar que V é precismanete a coleção de todos os números inteiros positivos ímpares. De fato, se existe um número par, digamos $2k$, com k inteiro positivo, pertencente a V, podemos provar por indução que todo inteiro k, com $t \geq 2k$ pretence a V.

Como, por hipótese, $1 \in V$ e $2k \in V$, então $1 + 1 + 2k = 2(k + 1) \in V$ e assim por diante. Com isso, deduzimos que $t, \quad t \geq 2k$ é um subconjunto de V. Assim, o conjunto A é finito. Contradição. Portanto, o conjunto V não tem números inteiros positivos pares, o que mostra que V é o subconjunto dos números ímpares positivos.

Assim, existem duas possibilidades: ou $1 \in V$ ou $1 \in A$. No primeiro caso, V é o subconjuntos do inteiros positivos ímpares e, como consequência, A é o subconjunto dos números inteiros positivos pares. No segundo caso, $1 \in A$, o subconjunto A é o subconjuntos do inteiros positivos ímpares e, como consequência, V é o subconjunto dos números inteiros positivos pares.

NÍVEL III

Preenchem-se as casas de um tabuleiro 3×3 como os números inteiros positivos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, de acordo com a Figura a seguir.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A soma dos inteiros de cada uma das diagonais do tabuleiro é igual a 15.

Se preenchermos de forma análoga um tabuleiro com os inteiros positivos $1, 2, 3, 4, \cdots, 9999, 10.000$, qual é a soma dos números de cada uma das diagonais desse tabuleiro?

SOLUÇÃO

Seja S_1 a soma dos números inteiros positivos que estão na diagonal que vai do canto superior esquerdo ao canto inferior direito e S_2 a soma dos números inteiros positivos que estão na diagonal que vai do canto inferior esquerdo ao canto superior direito. Para preencher as casas do tabuleiro com os números dados teremos que ter um tabuleiro 100×100.

Observe que, ao longo de uma linha, quando nos movimentamos uma coluna para a direita, o número cresce de 1; quando nos movimentamos, ao longo de uma linha, uma coluna para a esquerda, o número decresce de 1. Quando nos movimentamos, ao longo de uma coluna, uma linha para baixo, o número cresce 100.

Isto significa que a soma dos números da diagonal, que vai do canto superior esquerdo para o canto inferior direito, S_1 é igual a:

$$\begin{gathered}
S_1 = 1 + 102 + 203 + 304 + \cdots + 9899 + 1000 \\
= (100 \cdot 0 + 1) + (100 \cdot 1 + 2) + (100 \cdot +3) + \cdots + (100 \cdot 98 + 99) + (100 \cdot 99 + 100) \\
= 100(0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99) + (1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100)44 \\
= 100\Big[\frac{1}{2}(99)(100)\Big] + \frac{1}{2}(100)(101) \\
= 495000 + 5050 = 500050.
\end{gathered}$$

De modo análogo, a soma dos números da diagonal, que vai do canto inferior esquerdo para o canto superior direito, S_2 é igual a:.

$$\begin{gathered}
= 100 + 199 + 298 + \cdots + 9802 + 9901 \\
= (100 \cdot 0 + 100) + (100 \cdot 1 + 99) + (100 \cdot 2 + 98) + \cdots + (100 \cdot 98 + 2) + (100 \cdot 99 + 1) \\
= 100(0 + 1 + 2 + \cdots + 98 + 99) + (100 + 99 + 98 + cdots + 2 + 1) \\
= 500050.
\end{gathered}$$

Portanto, $S_1 = S_2$

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{\sqrt{n^2 - x^2}}{2 + x^{-x}} dx.$

SOLUÇÃO

A resposta é $\frac{\pi}{8}$.

Seja $I = \int_0^n \frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}dx$. Fazendo a substituição $x = nt$, temos $I = n^2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}dt$. Assim,

$$\frac{1}{n^2}I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}dt. \quad (1)$$

Observe que, para $0 < t < 1$, temos

$$0 < \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}} < \frac{1}{2}, \quad (2)$$

e para $\frac{1}{\sqrt{n}} < t < 1$, temos $\sqrt{n} < nt$ e $t^t < 1$, de modo que

$$\frac{1}{2+\sqrt{n}^{(-\sqrt{n})}} < \frac{1}{2+(nt)^{-nt}} < \frac{1}{2+n^{-n}}. \quad (3)$$

De (**), temos

$$0 < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}dt < \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad (4)$$

e de (***), temos

$$\frac{1}{2+\sqrt{n}^{(-\sqrt{n}}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \sqrt{1-t^2}dt < \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}dt < \frac{1}{2+n^{-n}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \sqrt{1-t^2}dt. \quad (5)$$

Fazendo n tender par infinito em (5), a integral do meio tend e para $\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$. Como $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$, segue de (1), (4) e (5) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}dx = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$