Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 16 - Data 24/06/2013

NÍVEL I

Suponha que temos três caixinhas. Uma com duas bolas pretas, outra com duas bolas brancas e a terceira com uma bola preta e uma bola branca. As caixinhas tinham suas etiquetas correspondentes- PP, BB e PB - mas, alguém trocou-as de modo que todas estão com a etiqueta errada.

Tirando apenas uma bola por vez de qualquer das caixas, sem olhar, qual é o menor número de bolas que temos que tirar para determinar corretamente o conteúdo das três caixas?

SOLUÇÃO

É possivel determinar corretamente o conteúdo das três caixas retirando apenas uma bola. A informação essencial para resolver o problema é que todas as etiquetas estão erradas. Tirando uma bola da caixa com etiqueta PB é possivel determinar corretamente o conteúdo das três caixas. De fato, retirando uma bola, digamos branca, a outra bola necessariamente tem de ser branca, pois, caso contrário, seria preta e a etiqueta estaria correta. Com isso, identificamos a caixa BB. Agora, a caixa cuja etiqueta é PP tem de ser a caixa PB, caso contrário, a etiqueta estaria correta. Assim, a caixa PB é a caixa PP. De modo análogo, resolveremos o problema se a bola retirada da caixa PB for a bola preta.

NÍVEL II

Encontre o menor inteiro positvo K tal que $2K$ é um quadrado perfeito; $3K$ é um cubo perfeito e $5K$ é a potência 5 de um inteiro.

SOLUÇÃO

Como K é o menor inteiro positivos satisfazendo as condições do problema, K é da forma $K = 2^a \times 3^b \times 5^c$. Como $2K$ é um quadrado perfeito, então o expoente a deve ser ímpar e o menor ímpar que seja múltiplo de 3 e de 5. Ou seja, $a = 15$ Por outro lado, o expoente b tem de ser par e o menor inteiro da forma $3m - 1$, com m inteiro ímpar, e ainda $3m - 1$ sendo um múltiplo de 5, para satisfazer a segunda condição, que é $3K$ ser um cubo perfeito. Assim, $m = 7$, o que nos dá $b = 20$. Com raciocínio análogo, $c = 24$. Portanto, $K = 2^{15} \times 3^{20} \times 5^{24}$.

NÍVEL III

Escreva a equação de um círculo no plano cartesiano que:

(a) não possui qualquer ponto com ambas as coordenadas racionais.

(b) possui um único ponto com ambas as coordenadas racionais.

(c) possui exatamente dois pontos com ambas as coordenadas racionais.

(c) possui exatamente três pontos com ambas as coordenadas racionais.

SOLUÇÃO

(a) O círculo com equação $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ não possui qualquer ponto com ambas as coordenadas racionais, pois, se assim fosse, do lado esquerda da igualdade teríamos um número racional e do lado direito um número irracional, o que uma contradição.

(b) O círculo com centro em $(0, \sqrt{3})$ e raio $\sqrt{3}$ possui equação $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$. Seja $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right)$, com p, q, r inteiros e $q \neq 0$, dois pontos sobre o círculo com ambas as coordenadas racionais. A equação do círculo nos dá:

$$(\frac{p}{q})^2 + (\frac{r}{q} - \sqrt{3})^2 = 3$$

e, portanto, $\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{q^2} + 3 - 2\frac{r}{q}\sqrt{3} = 3 \Longleftrightarrow \frac{p^2}{q^2} + r^2q^2 = 2\frac{r}{q}\sqrt{3} \Longleftrightarrow p^2 + q^2 = 2rq\sqrt{3}$.
flushleft

Como $\sqrt{3}$ é irracional, o número $2rq\sqrt{3}$ é irracional e a igualdade só pode ocorrer se $p = r = 0$. Portanto, o único ponto do círculo com ambas as coordenadas racionais é $P = (0, 0)$.

(c) O círculo de centro $(0,\sqrt{2})$ e raio $\sqrt{3}$, com equação $x^2+(y-\sqrt{2})^2=3$ possui apenas dois pontos com ambas as coordenadas racionais: $(1,0)$ e $(-1,0)$. Se existisse outro ponto com ambas as coordenadas racionais, o centro do círculo teria ambas as coordenadas racionais (veja na demonstração do caso (d)), o que é uma contradição, pois o centro do círculo é $(0,\sqrt{2})$.

(d) É impossível escrever a equação de um círculo que possui exatamente três pontos com ambas as coordenadas racionais. Vamos provar que, se um círculo tem três pontos com coordenadas racionais, então seu centro tem coordenadas racionais.

Suponha que existem três pontos sobre o círculo, todos eles com ambas as coordenadas racionais. Considere o triângulo determinado pelos três pontos. As mediatrizes de dois desses lados se encontram no centro do círculo. Olhando para as equações dessas mediatrizes, é fácil perceber que, como os pontos tem ambas as coordenadas racionais, estas equações possuem coeficientes racionais. Logo, o ponto de intereseção das retas (o centro do círculo) possui ambas as coordenadas racionais. Portanto, o centro do círculo possui coordenadas racionais.

Agora, suponha que o círculo possui exatamente três pontos, P,Q,S, com ambas as coordenadas racionais. Considere a reflexão desses pontos em torno do centro do círculo, digamos P',Q',S', que tem ambas as coordenadas racionais, e no máximo dois deles podem coincidir com alguns dos pontos P,Q,S. Logo, existe no mínimo mais um ponto sobre o círculo com ambas as coordenadas racionais. Portanto, nenhum círculo contém exatamente três pontos com ambas as coordenadas racionais.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Encontre

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{k}}\right)^n$$

ou mostre que o limite não existe.

SOLUÇÃO

O limite existe e é igual a e^2. Seja $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$. Para $n\geq 3$, temos $a_n\geq 1+\frac{2}{\binom{n}{1}}=1+\frac{2}{n}$,

enquanto para $n\geq 6$, temos

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + 2\frac{1}{\binom{n}{1}} + 2\frac{1}{\binom{n}{2}} + \left(\underbrace{\frac{1}{\binom{n}{3}} + \frac{1}{\binom{n}{4}} \cdots\cdots + \frac{1}{\binom{n}{n-3}}}_{(n-5)\text{ termos}}\right) \\
&\leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \frac{n-5}{\binom{n}{3}} \\
&= 1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \frac{6(n-5)}{n(n-1)(n-2)} \\
&< 1 + \frac{2}{n} + \frac{10}{n(n-1)} \\
&\leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{12}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$ e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{12}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n+12}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n+12}}\right]^{\frac{2n+12}{n}} = e^2.$$

Portanto, pelo princípio do sanduíche, temos $\lim_{n\to\infty} a_n^n = e^2$.