Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 17 - Data 01/07/2013

NÍVEL I

Na sala de aula, um professor quer dar um chocolate para quem tem bom raciocínio. Ele apresenta duas caixas fechadas e explica que cada caixa contém ou um chocolate ou um rato, mas que era possível haver ratos em ambas as caixas, ou chocolates em ambas, ou, por outro lado, um chocolate em uma e um rato na outra. O professor apontou os letreiros em cada caixa dizendo que um dos letreiros era verdadeiro e o outro era falso

Caixa I	**Caixa II**
Nesta caixa há um chocolate e na outra há um rato.	Em uma desas caixas, há um chocolate, e em uma dessas caixas há um .

.

Presumindo-se, é claro, que você prefereria o chocolate, que porta você abriria?

SOLUÇÃO

A informação de que um dos letreiros é falso e o outro é verdadeiro é fundamental para resolver o problema. Vamos supor que o letreiro da Caixa I é verdadeiro e o letreiro da Caixa II é falso. Ora, sendo o letreiro da Caixa I verdadeiro, também seria verdadeiro o letreiro da Caixa II. Ma, é impossível, pois somente um deles é verdadeiro. Logo, o letreiro da Caixa I é falso e o letreiro da Caixa II é verdadeiro. Neste caso, há um chocolate numa caixa e um rato na outra. Como o letreiro da Caixa I é falso, o rato só pode está na Caixa I. Você deve escolher a Caixa II.

NÍVEL II

Num laboratório de Matemática existe uma máquina curiosa. Você insere um número inteiro positivo que não possui zero como um de seus dígitos e ela produz um outro número inteiro positivo. Ela funciona de acordo com as regras seguintes:

Regra 1 - Para qualquer número inteiro positivo K, sem o zero como um de seus dígitos, o número $2K$ é entendido pela máquina como o número inteiro positvo formado por 2 seguido dos dígitos de K, não 2 vezes K, e $2K$ produz K.
Regra 2 - Para quaisquer números inteiros positivos K, L, se colocado na máquina K, produz L, então o número $3K$ produz $L2L$.

(a) Identifique um número K que, ao ser inserido na máquina, produz ele próprio
(b) Identifique um número K que, ao ser inserido na máquina, produz o número $K2K$.
(c) Identifique um número K que, ao ser inserido na máquina, produz o número $7K$.

SOLUÇÃO

(a) O número 323. De fato, como 23, pela Regra 1, produz 3, então pela Regra 2, o número 323 produz 323. É possível mostrar que 323 é o único número com esta propriedade.
(b) A resposta é 33233. Temos que encontrar K tal que produza $K2K$. Um tal número K só pode ser de uma das formas: $2X$, $32X$, $332X$, $3332X$ etc.Vamos examinar esses casos. O número $2X$ não satisfaz ao problema, pois $2X$ produz X, que possui menos dígitos que $(2X)2(2X)$. De modo análogo, podemos ver que o número $32X$ não vai satisfazer, pois produz o número $2X2$, que é mais curto que $(32X)2(32X)$. Agora, pode o número $(X2X)2(X2X)$ ser o mesmo número que $(332X)2(332X)$? A resposta é dada examinando os tamanhos de cada um, ou seja, a quantidade de dígitos de cada um dos números. Se h é a quantidade de dígitos de X, o número de dígitos de $X2X2X2X$ é igual a $4h + 3$, enquanto o número $332X2332X$ possui $2h + 7$ dígitos. Se $4h + 3 = 2h + 7$, então $h = 2$. Assim, pelo critério de tamanho, um número com a forma $332X$ é uma possibilidade, mas somente no caso de X ter dois dígitos. Observe que não há outras possibilidades. Se $K = 3332X$, produzirá o número $X2X2X2X2X2X2X2X$. Mas, o que queríamos era que produzisse $3332X23332X$. Observe que esses números são diferentes, pois se h é o comprimento de X, o número $X2X2X2X2X2X2X2X$ possui $8h + 7$ dígitos, enquanto $3332X23332X$ possui $2h + 9$ dígitos. Se $8h + 7 = 2h + 9$, teremos $h = \frac{1}{3}$, que não é inteiro. Portanto, não há qualquer número da forma $3332X$ que possa funcionar.

(c) Seja $K = 3273$. Este número produz 73273, que é $7K$. É fácil ver, pelos argumentos do item (b), que 3273 é a única solução do problema.

NÍVEL III

Escreva a equação de um círculo no plano cartesiano que:

(a) não possui qualquer ponto com ambas as coordenadas racionais.

(b) possui um único ponto com ambas as coordenadas racionais.

(c) possui exatamente dois pontos com ambas as coordenadas racionais.

(d) possui exatamente três pontos com ambas as coordenadas racionais.

SOLUÇÃO

(a) O círculo com equação $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ não possui qualquer ponto com ambas as coordenadas racionais, pois, se assim fosse, do lado esquerda da igualdade teríamos um número racional e do lado direito um número irracional.

(b) O círculo com centro em $(0, \sqrt{3})$ e raio $\sqrt{3}$ possui equação $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$. Seja $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right)$, com p, q, r inteiros e $q \neq 0$, um ponto sobre o círculo com ambas as coordenadas racionais. A equação do círculo nos dá: