Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

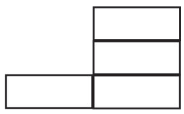
Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 18 - Data 08/07/2013

NÍVEL I

2. A figura a seguir é formada por 4 retângulos congruentes.



En cada rectângulo, o comprimento da base é igual ao triplo do comprimento da altura e o perímetro é igual a 64 cm.

Qual é o perímetro da figura?

SOLUÇÃO

Seja h o comprimento da altura de cada retângulo e b o comprimento da base. O perímetro de cada retângulo é dado por $2b + 2h = 64$. Portanto, $b + h = 32$. Como $b = 3h$, temos $b + h = 3h + h = 4h = 32$. Logo, $h = 8$ e $b = 24$. O perímtro da figura é igual a $4b + 6h = 4 \times 24 + 6 \times 8 = 96 + 48 = 144cm$.

NÍVEL II

Um avô quer repartir entre seus dois netos, Martin e Juan, a quantia de $R\$264,00$. Para Juan ele dá a cada semana $R\$15,00$; a Martin ele dá $R\$18,00$.

Depois de quantas semanas o avô repartiu os $R\$264,00$?

SOLUÇÃO

A resposta é depois de 24 semanas. Seja x a quantidade de semanas que Martin recebeu $R\$18,00$ e y a quantidade de semanas que Juan recebeu $R\$18,00$. Assim, temos $15x + 24y = 264$, que é o mesmo que $5x + 6y = 88$, que nos dá $x = \frac{88-6y}{5}$. Como o número x é um inteiro positivo, temos que 5 divide o número $88 - 6y$. Isto só é possivel se $y = 3, 8$ *ou* 13. Se $y = 3$, segue que $x = 14$. Se $y = 8$, segue $x = 8$ e se $y = 13$ segue que $x = 2$. Mas, essas são as soluções da equação $5x + 6y = 88$. Mas, queremos as soluções da equação $15x + 24y = 264$. Então basta multiplicar por 3 cada uma das soluções e verificar que $x = y = 24$ é a solução para o problema.

NÍVEL III

Suponha que seja possível pintar cada um dos inteiros com uma das três cores: vermelho, verde e azul. Suponha que a soma de quaisquer dois números inteiros verdes seja um número azul, a soma de quaisquer dois números inteiros azuis seja um número verde, o simétrico de qualquer número inteiro verde seja um número azul. Finalmente, suponha que o número 1492 seja vermelho e que o número 2011 seja verde.

Descreve precisamente quais números são verdes, quais números são azuis e quais números são vermelhos.

SOLUÇÃO

Observe que, como $0 + 0 = 0$, segue que o número 0 é obrigatoriamente vermelho, pois se 0 fosse verde, a soma de dois verdes é azul, mas $0 + 0 = 0$. Contradição. Do mesmo modo, 0 não pode ser vermelho. Por outro lado, se n é vermelho, então $-n$ é vermelho. Caso contrário, se $-n$ fosse verde, teríamos $-(-n) = n$ seria azul. Contradição. De modo análogo, se n é vermelho então $-n$ não pode azul. Deste modo, é suficiente identificar a cor de cada número inteiro positivo.

Para isso, seja x o menor inteiro positvo que não seja vermelho. Vamos supor que x seja verde. Por hipótese, $x + x = 2x$ é azul, $2x + 2x = 4x$ é verde, $4x + 4x = 8x$ é azul, e assim por diante.

Vamos provar por indução sobre k, com k inteiro não negativo, que o número $(3k + 1)x$ é verde e o número $(3k + 2)x$ é azul. Para $k = 0$ já verificamos. Suponha que o resultado é válido para $0, 1, 2, \cdots, k$. Considere o número $[3(k + 1) + 1]x = (3k + 2)x + 2x$, que é a soma de dois números azuis, portanto um número verde. Assim, o número $[3(k + 1) + 2]x = (3k + 1)x + 4x$, que é a soma de dois números verdes, portanto, pela hipótese, é um número azul. Se tivéssemos tomado x como sendo verde, o raciocínio é o mesmo.

Vamos mostrar que o restante dos inteiros positivos múltiplos de $x : 3x, 6x, 9x, 12x, \cdots$ são todos vermelhos. De fato, se $3kx$ é verde, então $3(k+1)x = 3kx + x$, que é a soma de dois números verdes, portanto, por hipóteses, é um número azul. Contradição. Agora, suponha que o número $3kx$ seja azul. Assim, o número $3(k+2)x = 3kx + 2x$, que é a soma de dois números azuis, portanto, pela hipótese, é um número verde. Contradição. Portanto, a única possibilidade possível é que $3kx$ seja vermelho.

Agora, a firmamos que qualquer número positivo que não for múltiplo de x tem de ser vermelho. De fato, considere que a sequência

$$x, 2x, 4x, 5x, 7x, 8x, 10x, 11x, 13, 14x, \cdots$$

seja formada alternativamente por um número verde e um número azul.

Seja y um número inteiro positivo que não é um múltiplo de x.

Se $y < x$, então y é obrigatoriamente vermelho, pois x é o menor número inteiro positivo que não é vermelho.

Suponha que y esteja entre dois números da sequência acima que diferem por x: $3(k+1)x < y < (3k+2)x$. Neste caso, se y é azul, então como $-3(k+1)x$ é azul, o número $y - 3(k+1)x$ é verde. Mas, da desigualdade anterior, temos que $0 < y - 3(k+1)x < (3k+2)x - 3(k+1)x = x$. Contradição, pois x é o menor número que não é vermelho. Por outro lado, se y é verde, segue, por hipótese, que $-y$ é azul. Logo, $-y + 3(k+2)x$ é verde. Mas, $-y + 3(k+2)x < x$. Contradição. Portanto, y é vermelho.

Agora, vamos examinar o caso restante, aquele em que y está entre dois termos da sequência que diferem por $2x :$ $(3k+2)x < y < (3k+4)x$. Neste caso, se y é verde, então $y - (3k+2)x$ é azul, e se y é azul $(3k+4)x - y$ é azul. Agora, $0 < y - (3k+2)x < 2x$ e $0 < (3k+4) - y < 2x$. Logo, no caso em que y não é um número vermelho, temos um inteiro positivo azul entre 0 e $2x$, que pleo caso acima já sabemos que não existe número inteiro positivo azul ente x e $2x$, e como x é o menor inteiro positivo não vermelho, não pode ser nenhum número inteiro positivo entre 0 e x. Também, nem $y - (3k+2)x$ nem $(3k+4)x - y$ pode ser x, pois y não é múltiplo de x. Portanto, y tem de ser vermelho.

Já sabemos que os únicos inteiros positivos que não são vermelhos são os múltiplos de x da forma $(3k+1)x$ e $(3k+2)x$. Agora, é dado do problema que o número 2011 é verde. Logo, 2011 tem de ser múltiplo de x. Mas, 2011 é um número primo. Portanto, os únicos casos possíveis é $x = 1$ ou $x = 2011$. Por outro lado, sabemos que o número 1492 é vermelho e, além disso, $1492 = 3 \times 497 + 1$. Portanto $x \neq 1$, o que implica $x = 2011$.

Portanto, os inteiros positivos verdes são da forma $3(k+1)2011$, com k inteiro não negativo, enquanto os inteiros positvos verdes são da forma $(3k+2)2011$, com k inteiro não negativo. Os números interios negativosd verdes são da forma $-(3k+2)2011 = [3(-k-1)+1]2011$, com k inteiro não negativo, e os inteiros negativos azuis são da forma $-(3k+1)2011 = [3(-k-1)-2]2011$, com k inteiro não negativo.

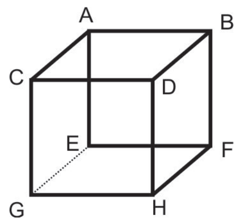
NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Sejam C_1, C_2 dois cubos unitários.

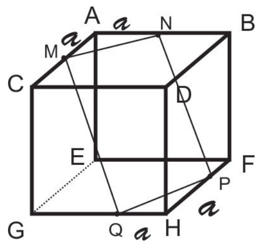
É possivel fazer um buraco no cubo C_1 de modo que possamos passar o cubo C_2 através dele?

SOLUÇÃO

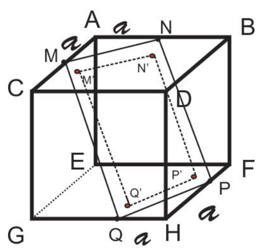
A resposta é sim. Sejam A, B, C, D, E, F, G, H os vértices do cubo C_1, de modo que o vértice A e H sejam vértices opostos, veja Figura a seguir.



Seja $\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$. Por exemplo, $a \cong 0,8$. Na aresta AC, marque o ponto M tal que $AM = a$ e sobre a aresta AB marque o ponto N tal que $AN = a$. Sobre a aresta FH marque um ponto P tal que $HP = a$ e sobre a aresta GH marque um ponto q tal que $HQ = a$, veja Figura a seguir.



É fácil ver que o quadrilátero $MNQP$ é um retângulo com ambos os lados maiores do que 1, pois $MN = QP > 1$, desde que $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $MQ = NP > 1$, com MQ maior do que a aresta do cubo. Agora, reduza os lados desse retângulo um pouco, certificando-se de que os lados permanecem maiores do que 1. Deste modo, obtemos um retângulo $M'N'P'Q'$ totalmente dentro do cubo, veja Figura a seguir.



Agora, perpendicular ao retângulo $M'N'P'Q'$, faz-se um furo exatamente ao longo dos lados desse retângulo. Assim, teremos um buraco no cubo C_1 que é suficiente para passar o cubo C_2.