Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 19 - Data 15/07/2013

NÍVEL I

Nove pontos se encontram distribuídos num arranjo quadrado de 3 linhas e 3 colunas, como na Figura a seguir.

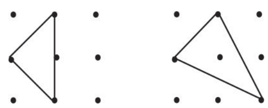
Quantos triângulos não congruentes entre si podem ser formados tendo seus vértices em três destes pontos?

SOLUÇÃO

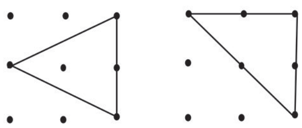
A resposta é o total de 8 triângulos. Temos que arrumar uma maneira para contar os triângulos. Para isso, consideramos a distância entre dois pontos consecutivos de uma mesma linha ou coluna como sendo igual a 1. Agora, dividimos o problema da contagem em três casos:

Caso 1 - Se o triângulo possui pelo menos um lado de comprimento 1. Neste caso, temos 4 triângulos possíveis, veja Figura a seguir.

Caso 2 - Se o triângulo não possui lado de comprimento 1, mas tem pelo menos um lado de comprimento 2. Neste caso, temos 2 triângulos possíveis, veja Figura a seguir.



Caso 3 - Se o triângulo não possui lado de comprimento 1 nem de comprimento 2. Neste caso, temos 2 triângulos possíveis.



Portanto, no total temos $4 + 2 + 2 = 8$ triângulos possíveis.

NÍVEL II

Sem usar calculadora ou computador, diga, justificando, qual é o número inteiro mais próximo do número real $K = 100(12 - \sqrt{143})$.

SOLUÇÃO

A resposta é 4. Podemos escrever o número dado K como
$K = 100(12 - \sqrt{143}) = \frac{(100(12-\sqrt{143})(12+\sqrt{143})}{12+\sqrt{143}} = \frac{100}{12+\sqrt{143}}$.

Agora, como $11 < \sqrt{142} < 12$, podemos escrever $\frac{100}{12+12} < \frac{100}{12+\sqrt{143}} < \frac{100}{12+11}$ Ou seja,

$$4 = \frac{100}{25} < \frac{100}{12+12} < \frac{100}{12+\sqrt{143}} < \frac{100}{12+11} < 4,4$$

Isto significa que o número real K é maior do que 4, mas menor do que $4,4$. Portanto, o número inteiro mais próximo de K é 4.

NÍVEL III

Um jogo é disputado por dois jogadores num plano infinito contendo 51 peças, sendo 50 ovelhas e 1 lobo. O objetivo do lobo é capturar as ovelhas. O primeiro jogador inicia o jogo movimentando o lobo. Em seguida, o segundo jogador move alguma ovelha, e assim sucessivamente. Em cada movimento, uma peça pode se movimentar até uma distância de 1 metro.

È verdade que, independente da posição inicial das peças, o lobo sempre consegue capturar ao menos uma ovelha?.

SOLUÇÃO

. A resposta é Não. Seja $(0,0)$ a posição inicial do lobo no plano. Para que as ovelhas consigam se livrar do lobo, basta que cada uma das 50 ovelhas estejam em cada uma das retas $y = 3m$, para $1 \leq m \leq 50$. Desse modo, sempre que o lobo estiver a 1 metro de distância de uma dessas retas, o segundo jogador deve movimentar a ovelha desta reta na direção oposta à que o lobo se encontra. Como o lobo só consegue perseguir uma ovelha por vez, as ovelhas vencem.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, seja.

$$S_n = \sqrt[3]{a_n + \sqrt[3]{a_{n-1} + \sqrt[3]{a_{n-2} + \cdots + \sqrt[3]{a_0}}}}$$

onde $a_n = \frac{6n+1}{n+1}$.

Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe e determine seu valor.

SOLUÇÃO

Inicialmente, vamos mostrar, usando indução, que a sequência S_n é não decrescente. De fato, $S_0 = 1 < \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = S_1$. Suponha que $S_{n-1} \leq S_n$. Deste modo,

$$S_n = \sqrt[3]{a_n + S_{n-1}} \leq \sqrt[3]{a_{n+1} + S_n} = S_{n+1}$$

Agora, vamos mostrar, também por indução, que a sequência S_n é limitada superiormente por 2.

É fácil ver que $S_0 = 1 < 2$. Suponha que $S_{n-1} < 2$. Temos que $S_n = \sqrt[3]{a_n + S_{n-1}} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2$. Portanto, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe.

Como $S_n^3 = a_n + S_{n-1}$, se $L = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, fazendo n tender ao infinito, temos $L^3 = 6 + L$, o que nos dá $L = 2$.