Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 20 - Data 22/07/2013

NÍVEL I

André e Vitor disputam um jogo num tabuleiro 7×7, em que eles jogam alternadamente. André começa o jogo. Uma jogada consiste escrever o número 0 ou o número 1 em alguma casa não vazia do tabuleiro. André vence o jogo se ele consegue seis números iguais numa linha, coluna ou diagonal, sendo que os números iguais devem estar juntos. Além disso, na sua vez de jogar, Vitor pode abrir de sua jogada, se ele quizer.

Prove que Vitor tem uma estratégia para que André não vença, independente de como André jogue.

SOLUÇÃO

Enumeramos as colunas do tabuleiro de 1 a 7, da esquerda para a direita e as linhas de 1 a 7 de cima para baixo. A seguir, numeramos as casa do tabuleiro como na figura a seguir.

	1	2	3	4	5	6	7
1		d_3	f_1		f_1	d_4	
2	d_1	d_2	f_2	c_4	f_2	d_5	d_6
3	c_1	c_2	f_3	f_3	c_5	c_6	c_7
4		f_4	c_3		c_5	f_4	
5	c_1	c_2	c_3	f_5	f_5	c_6	c_7
6	d_4	d_5	f_6	c_4	f_6	d_2	d_3
7		d_6	f_7		f_7	d_1	

A estratégia de Vitor para que André não vença será a seguinte: cada vez que André colocar um número, 0 ou 1, em uma das casas enumeradas, na jogada seguinte Vitor colocará um número distinto na outra casas que possuem a mesma enumeração.

Deste modo, André nunca poderá ganhar, pois para colocar, por exemplo, 6 números iguais juntos na coluna 1, as casas enumeradas com C_1 devem ter os mesmos números, mas a estratégia de Vitor faz com que isto nunca aconteça, e sucede o mesmo nas outras colunas e linhas. Existem somente 6 diagonais possíveis onde se podem colocar 6 números iguais juntos, os quais também estão enumerados com $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ na estratégia de Vitor.

Observe que as casas sem enumeração funcionam como um só grupo, que no total tem 9 casas, uma quantidade ímpar. Neste caso, cada vez que André coloca um número numa casa deste grupo, Vitor, na sua vez de jogar, abre mão da jogada. Assim, a estratégia funciona corretamente e André nunca poderá ganhar.

NÍVEL II

Um professor de Matemática propõe um jogo para seu estudante Gomito. Ele escreve o número 1 no quadro negro e diz para o estudante: "Para qualquer número escrito no quadro negro, você pode multiplicá-lo por 2 ou 3 e somar 1. Você pode fazer estas operações tantas vezes quantas você queira".

Fazendo estas operações, sucessivamente,

(a) é possível que Gomito obtenha o número 2008?

(b) é possível que Gomito obtenha o número 2013?

SOLUÇÃO

(a) Sim é possível. A seguir temos a sequência de passos que permite ir de 1 até 2008:

$$1 \to 4 \to 13 \to 27 \to 55 \to 111 \to 334 \to 669 \to 2008$$

(b) Não é possível. Suponha que seja possível obter, usando as regras dadas, o número 2013. Um passo antes de chegar a 2013 teríamos um número n. Então pode ocorrer duas coisas: ou $2n + 1 = 2013$ ou $3n + 1 = 2013$. A equação $3n + 1 = 2013$ não admite solução inteira. Logo, $2013 = 2n + 1$, que nos dá $n = 1006$. No passo anterior teríamos ou $2n + 1 = 1006$ ou $3n + 1 = 1006$. Como a equção $2n + 1 = 1006$ não admite solução inteira, segue que, necessariamente, $3n + 1 = 1006$, que tem solução $n = 335$. Do mesmo modo, no passo imediatamente anterior teríamos ou $2n + 1 = 335$ ou $3n + 1 = 335$. Como a equação $3n + 1 = 335$ não admite solução inteira, então $2n + 1 = 335$, que nos dá

$n = 167$. Seguindo o raciocínio anterior, no passo imediatamente anterior teríamos ou $2n + 1 = 167$ ou $3n + 1 = 167$. Como a equação $3n + 1 = 167$ não admite solução, temos que $2n + 1 = 167$, que nos dá a solução $n = 83$. No passo imediatamente anterior, teríamos ou $2n + 1 = 83$ ou $3n + 1 = 83$. Como a equação $3n + 1 = 83$ não admite solução inteira, segue que $2n + 1 = 83$, que nos dá a solução $n = 41$. No passo imediatamente anterior, teríamos $2n + 1 = 41$ ou $3n + 1 = 41$. A última equação não admite solução nos inteiros. Segue que$2n + 1 = 41$, que nos dá $n = 20$. No passo imediatamente anterior, teríamos $2n + 1 = 20$ ou $3n + 1 = 20$. Como a equação $2n + 1 = 20$ não admite solução inteira, temos que $3n + 1 = 20$. Mas, esta última equação também não admite solução inteira. Portanto, é impossível obter o número 2013.

NÍVEL III

Em torno de uma mesa circular estão sentados $2n$ peruanos, $2n$ bolivianos e $2n$ equatorianos. Num certo momento, todas as pessoas que possuem como vizinhos (da esquerda e da direita) pessoas de mesma nacionalidade ficam de pé.

Qual é o maior número de pessoas que podem ficar de pé?

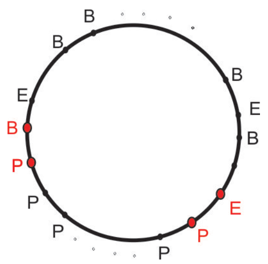
SOLUÇÃO

A resposta é $6n - 4$ pessoas podem ficar de pé. Observe que, inicialmente, temos $6n$ pessoas sentadas em volta da mesa redonda. A partir de alguma pessoa, e no sentido horário, associamos as pessoas os números $1, 2, 3, \cdots, 6n$, nesta ordem. Analisemos as pessoas as quais são associados os números ímpares. Se todas essas pessoas ficam de pé, então todas as pessoas que a elas são associados um número par seriam de mesma nacionalidade. Isto significa que haveriam $3n$ pessoas de mesma nacionalidade, que não é possível pois, pelos dados do problema, existem $2n$ pessoas de mesma nacionalidade.

Suponha que fiquem de pé todas as pessoas que tem a elas associadas um número ímpar, a exceto uma delas. Sem perda de generalidade, suponha que as pessoas $3, 5, 7, \cdots, 6n-1$ ficam de pé, mas a pessoa 1 permaneça sentada. Isto significa que as pessoas $2, 4, 6, \cdots, 6n$ são de mesma nacionalidade. Mas, isto é impossível, pois as pessoas que são vizinhas à pessoa 1 não podem ter a mesma nacionalidade. Concluímos que as pessoas que tem a elas associadas um número ímpar, no máximo $3n - 2$ ficam de pé.

Analogamente, das pessoas que tem a elas associadas um número ímpar, no máximo $3n - 2$ ficaram de pé. No total, teríamos como máximo a quantidade de $6n - 4$ pessoas que ficaram de pé. Vejamos agora, com um exemplo, que é possível conseguir esta quantidade. Na figura a seguir, P, B, E denotam peruano, boliviano e equatoriano, respectivamente.

Neste exemplo, se ficaram de pé todas as pessoas, exceto as assinaladas de vermelho, no total temos $6n - 4$ pessoas de pé.



NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Prove que existem 2013 números inteiros positivos consecutivos, tais que para cada um deles o quociente entre o maior divisor primo e seu menor divisor primo é um número racional maior do que 20.

SOLUÇÃO

Seja M é um número inteiro positivo satisfazendo ao problema. Suponhamos que p e q são dois números primos divisores de M. É claro que o quociente entre o maior divisor primo e seu menor divisor primo é um número racional maior do que $\frac{p}{q}$. Logo, para resolver o problema vamos encontrar 2009 números naturais consecutivos tais que cada um deles possua dois divisores primos cujo quociente é maior do que 20.

Como o conjunto dos números primos é infinito, tomamos dois primos p_1 e q_1 tais que $q_1 > 20p_1$. Em seguida, tomamos um primos p_2 maior do que os dois anteriores e outro primo q_2 tal que $q_2 > 20p_2$. Continuando dessa maneira até conseguir os números $p_1, q_1, p_2, q_2, \cdots, p_{2013}, q_{2013}$, que por construção são distintos e satisfazem:

$$q_1 > 20p_1, \;\; q_2 > 20p_2, \;\; \cdots, \;\; q_{2013} > 20p_{2013}$$

Agora, consideramos o seguinte sistema de congruências:

$$\begin{aligned} x + 1 &\equiv 0(mod\ p_1q_1) \\ x + 2 &\equiv 0(mod\ p_2q_2) \\ x + 3 &\equiv 0(mod\ p_3q_3) \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots \\ x + 2013 &\equiv 0(mod\ p_{2013}q_{2013}) \end{aligned}$$

Como os números $p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3, \cdots, p_{2013}q_{2013}$ são primos entre si, pelo Teorema Chinês de Restos, o sistema de congruência possui infinitas soluções. Tomamos uma solução positiva $x = n$ e, desta forma, se $1 \leq i \leq 2013$, o número $n + i$ é múltiplo de p_iq_i, onde $q_[i > 20p_i$. Logo, o número inteiro positivo $n + i$ possui dois divisores primos cujo quociente é maior do que 20. Portanto, mostramos que existem 2013 números inteiros positivos tais que cada um deles possui dois divisores primos cujos quociente é maior do que 20.