Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 21 - Data 29/07/2013

NÍVEL I

Ana convidou dezessete amigos para a sua festa de aniversário. Associou a cada um deles um número inteiro positivo de 2 a 18, deixando para si mesma o número 1. Quando ela e seus amigos estavam dançando aos pares, observou que a soma dos números de cada par era um quadrado perfeito.

Qual era o número da pessoa que dançava com Ana?

SOLUÇÃO

A resposta é 15. Se a pessoa que está associado ao número a está dançando com a pessoa associada ao número b, denotamos por (a, b). Pela hipótese do problema, (a, b) implica que $a \neq b$ e $a + b$ é um quadrado perfeito. O quadro a seguir mostra os possíveis pares de (m, n), com $1 \leq m, n \leq 18$.

a	b
1	3, 8 15
2	7, 14
3	1, 6, 13
4	5, 12
3	1, 6, 13
4	5, 12
5	4, 11
6	3, 10
7	2, 9, 18
8	1, 17
9	7, 16
10	6, 15
11	5, 14
12	4, 13
13	3, 12
14	2, 11
15	1, 10
16	9
17	8
18	7

É fácl ver que no quadro acima existem 3 pares já formados: $(16, 9), (17, 8), (18, 7)$. Como o número 2 só pode formar um par com 7 ou 14 e 7 já forma um par com 18, segue que 2 forma um par com 14. Ou seja, existe o par $(2, 14)$.

Como 11 só pode formar um par com 5 ou 14, e 14 já forma um par com 2, temos que formamos o par $(11, 5)$.

Como 4 só pode formar um par com 5 ou 12, e já temos o par $(11, 5)$, segue que formamos o par $(4, 12)$.

Como 13 só pode formar um par com 3 ou 12, e 12 já forma o par $(4, 12)$, segue que formamos o par $(13, 3)$

Como 1 só pode formar um par com $3, 8$ ou 15, e já existem os pare $(17, 8)$ e $(13, 3)$, segue que formamos o par $(1, 15)$. Portanto, Ana, que está associada ao número 1, está dançando com a pessoa associada ao número 15.

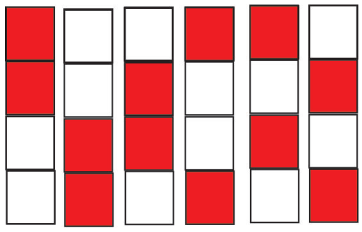
NÍVEL II

De quantas maneiras se pode pintar um tabuleiro de 4 linhas e 5 colunas seguindo as regras seguintes?

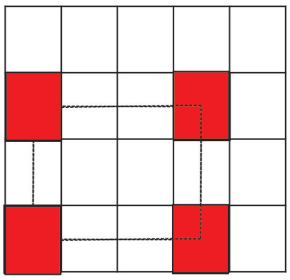
(a) Cada casa do tabuleiro deve ser pintada com uma das cores: vermelha ou branca.
(b) Em cada coluna a quantidade de casas vermelhas deve ser igual a quantidade de casas brancas.
(c) Não deve haver 4 casas da mesma cor cujos centros formem um retângulo com lados paralelos aos bordos do tabuleiro.

SOLUÇÃO

A resposta é 720. Em cada coluna deve haver duas casas brancas e duas casas vermelhas. Logo, temos 6 possibilidades para pintar as colunas, veja figura a seguir.



Agora, observe que, no tabuleiro, duas colunas não podem ser pintadas do mesmo modo, pois, neste caso, teríamos um retângulo cujos centros estariam, por exemplo, em casas vermelhas, veja na figura a seguir, o que não é possível pela condição (c). Portanto, as cinco colunas do tabuleiro tem de ser pintadas de formas distintas.

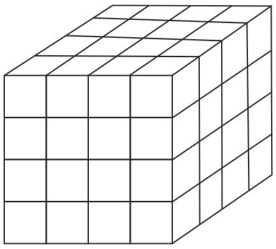


Uma questão é pertinente: Ao pintarmos as colunas de formas diferentes garantimos que se cumpra a condição (c)? A resposta é sim. De fato, suponhamos que fizemos a pintura do tabuleiro de forma que as 5 colunas estejam pintadas de formas distintas e, apesar disto, tenhamos um retângulo que possui seus vértices no centro de casas de mesma cor, digamos vermelhas. Escolha as duas colunas que tenham vértices do dito retângulo. Essas colunas possuem as casas vermelhas em posições iguais, pela condição (b) as outras duas devem ser brancas. Portanto, as colunas escolhidas estariam pintadas da mesma forma, o que não é possível.

Agora, para a primeira coluna temos 6 formas distintas de pintá-la. Escolhamos uma delas. Para a segunda coluna temos agora 5 formas distintas de pintá-la, pois não pode ser igual a forma da primeira. Para a terceira coluna existem 4 formas distintas de pintá-la; para a quarta 3 e para a quinta 2. Portanto, temos um total de
$6 \times 5 \times \; 4 \times 3 \times 2 = 720$ formas disntintas de pintar o tabuleiro nas condições pedidas.

NÍVEL III

Há no mercado um jogo-da-velha tridimensional. O tabuleiro é um cubo $4 \times 4 \times 4$, composto de 64 casas, veja figura a seguir, em que cada jogador, alternadamente, joga colocando a cruz da sua cor. O primeiro que coloca quatro cruzes da sua cor em linha reta ganha o jogo.



Existem quantas maneiras distintas de um jogador vencer?

SOLUÇÃO

A resposta é 78. Considere um cubo $6 \times 6 \times 6$ envolvendo o cubo dado $4 \times 4 \times 4$. Cada reta vencedora do cubo $4 \times 4 \times 4$ intercepta dois cubinho $1 \times 1 \times 1$ do cubo envolvente. Portanto, o número de maneiras de vencer o jogo é a metade da quantidade de cubinhos do tamanho $1 \times 1 \times 1$ das faces do cubo envolvente. Ou seja, $\frac{1}{2}(6^3 - 4^3) = 78$.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Defina uma sequência a_n por $a_1 = 1$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = \cos(\arctan a_n)$.

Encontre uma fórmula para a_n.

SOLUÇÃO

Seja f_n o n-ésimo número de Fibonacci. Isto é, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Afirmamos que:

$$a_n = \sqrt{\frac{f_n}{f_{n+1}}}$$

Vamos fazer a prova por indução sobre n. Antes disso, observe que cada a_n é positivo, para $0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, e $x > 0$. Observe também que, podemos escrever:

$$a_{n+1} = \cos(\arctan a_n) = \frac{1}{\sec(\arctan a_n)}.$$

Ou seja,

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sec U}, \ \textit{onde } U = \arctan a_n$$

Mas, $U = \arctan a_n \Longrightarrow \tan U = a_n$. Assim,

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sec U} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 U}} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n^2}}$$

Para o caso $k+1$, temos:

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{1+a_k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f_k}{f_{k+1}}}} = \sqrt{\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}}},$$

concluindo a prova.

Do exposto acima, observe ainda que, como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_n}{f_{n+1}} = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, que é a **Razão Áurea**, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ é o inverso da **Razão Áurea**.