
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 22 - Data 05/08/2013

NÍVEL I

Um jogador A disputa o jogo seguinte com um amigo B. A aposta de cada um dos jogadores A e B é sempre a metade do dinheiro que o jogador A tem em seu bolso. Uma jogada consiste em lançar uma moeda. O jogador A ganha se, no lançamento da moeda, a face para cima for cara, e perde se for coroa. O jogo se repete e a cada jogada eles continua apostando a metade do dinheiro que possui o jogador A. No final, o número de vezes que o jogador A perdeu foi igual ao número de vezes que ele ganhou.

O jogador A ganhou, perdeu ou ficou sem dinheiro?

SOLUÇÃO

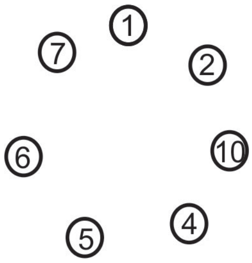
Toda vez que o jogador A ganha, seu dinheiro é multiplicado por $\frac{3}{2}$. Toda vez que ele perde, seu dinheiro é multiplicado por $\frac{1}{2}$. Se o número de vezes que o jogador A ganhou foi igual ao número de vezes que ele perdeu, ele jogou um número par de vezes, digamos $2n$ vezes, onde n é um número natural. Suponha que, inicialmente o jogador A possui uma quantia de Q reais. Numa sequência de $2n$ jogos, onde ele perdeu n vezes e ganhou n vezes, sua fortuna se resume a:

$$Q \times (\frac{3}{2})^n \times (\frac{1}{2})^n = (\frac{3}{4})^n \times Q$$

Como $\frac{3}{4} < 1$, o valor $(\frac{3}{4})^n$ vai se tornando cada vez menor quando n vai crescendo. Portanto, ele perde e, se continuar jogando, vai ficar sem dinheiro.

NÍVEL II

O professor de Matemática mostra a Joãzinho um arranjo circular de sete discos, cada um deles identificado com um número, veja Figura a seguir,



que tem a propriedade de que cada um dos inteiros $1, 2, 3, 4, \cdots, 14$ ou está em um disco ou então é igual a soma dos números de dois desses discos que sejam adjacentes. O professor pede a Joãzinho para fazer um outro arranjos nas mesmas condições mas, que em nenhum disco apareça o número 5.

Joãozinho vai conseguir o arranjo? Se a resposta for sim, mostre o arranjo; se a resposta for não, explique a impossibilidade.

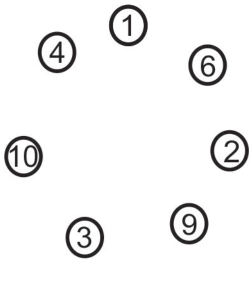
SOLUÇÃO

A resposta é: Joãozinho vai conseguir o arranjo pedido pelo professor! Sejam $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_7$ os números com os quais Joãzinho vai identificar os discos. Pela hipótese do problema, cada um dos números do conjunto $1, 2, 3, \cdots, 14$ ou identifica um disco ou é igual a soma dos números que identificam dois discos adjacentes. Isto significa dizer que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_7 + a_1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 14, \quad \textit{ou ainda}$$

$$3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + \cdots + 3a_7 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 14 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = 35$$

Agora, Joâzinho observa que, como o número 5 não pode aparecer identificando qualquer um dos discos, e $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, ele coloca 1 e 4 adjacentes. Para obter 7, coloca 1 e 6 adjacentes etc. Desse modo Joãozinho consegue fazer o arranjo mostrado na Figura a seguir.



NÍVEL III

Um quadro negro está inicialmente limpo. Em cada movimento, pode-se adicionar dois números $1's$ ou apagar duas cópias de um mesmo número n e colocar em seus lugares os números $n-1$ e $n+1$.

Qual é o número mínimo de movimentos necessários para colocar 2013 no quadro negro?

SOLUÇÃO

A resposta é 1359164851. Seja $f(n)$ o número mínimo de movimentos necessários para colocar um número inteiro positivo n no quadro negro. Vamos considerar um quadro auxiliar, chamado quadro branco, formado pelos quadrados dos números escritos no quadro negro. Afirmamos que a soma dos números do quadro branco é igual a duas vezes o número de movimentos feitos (*). De fato, cada movimento aumenta essa soma em duas unidades, pois temos

$$(n-1)^2 + (n+1)^2 - n^2 - n^2 = 1 + 1 = 2$$

O movimento anterior ao aparecimento de n no quadro negro deve ser a substituição de duas cópias de $n-1$ por $n-2$ e n. Para que a quantidade seja mínima, não devem existir mais cópias de $n-1$ além dessas duas substituídas. Assim, após $f(n)$ movimentos, o número $n-2$ está escrito no quadro negro. Procedendo dessa maneira, na configuração final, os números escritos no quadro negro são $n, n-2, n-3, \cdots, 3, 2, 1$, com 1 extra se a soma dos quadrados desse números é impar.

Segue de (*) que:

$$f(n) = \frac{[(n^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 + 1^2]}{2}, \textit{ se } n \textit{ deixa resto } 0 \textit{ ou } 1 \textit{ quando dividido por } 4$$

$$f(n) = \frac{[(n^2 + (n-2)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2]}{2}, \textit{ se } n \textit{ deixa resto } 2 \textit{ ou } 3 \textit{ quando dividido por } 4$$

Agora, observe que $2013 = 4 \times 503 + 1$, e que

$k^2 + (k-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \frac{k(k+1)(2k+1}{6}$. Portanto, temos

$$f(2013) = \frac{[(2013^2 + (2011)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 + 1^2]}{2} = \frac{671 \times 1006 \times 4027}{2}$$

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Para uma curva plana, simples e fechada pode existir mais de uma corda de comprimento máximo. Por exemplo, num círculo existem infinitas, pois todos os diâmetros são cordas de comprimento máximo. Por outro lado, a elípse possui uma única corda de comprimento máximo, que é o eixo maior.

Dado uma curva plana, simples e fechada, mostre que não existem duas cordas de comprimento máximo que sejam paralelas.

SOLUÇÃO

Suponha que uma curva plana, simples e fechada possui duas cordas de comprimento máximo que sejam paralelas. Como as cordas são paralelas, os pontos extremos dessas cordas são vértices de um paralelogramo. Mas, se isso acontece, no mínimo uma das diagonais é maior do que cada um dos lados desse paralelogramo. (para ver isso use a Lei dos Cossenos). Mas, os lados são as cordas de comprimento máximo, que são menores do que no mínimo uma das diagonais, que também é uma corda. Contradição. Portanto, numa curva plana, simples e fechada, não existem duas cordas de comprimento máximo que sejam paralelas.