Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO da LISTA SEMANAL No. 23 - Data 12/08/2013

NÍVEL I

A Senhora Dolores, seguindo a receita de seu médico, deve tomar todo o conteúdo do seu vidro de remédio em 4 dias, da maneira seguinte: no primeiro dia a metade do total; no segundo dia, um terço do que restou; no terceiro dia um quarto do que sobrou; no quarto dia, 6 comprimidos.

Quantos comprimidos tem seu vidro de remédio?

SOLUÇÃO

A resposta é 24. No primeiro dia a Senhora Dolores, seguindo a receita do médico, toma a metade dos comprimidos. Logo sobra a metade do total, T: $\frac{1}{2}T$. No segundo dia toma $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$). Logo, sobrou $(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{2}{6}T$ No terceiro dia toma $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{6}$. Isto é, toma $\frac{1}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$. Assim, sobrou $\frac{2}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$. Como no quarto dia ela terminou de tomar o total (T), temos que $\frac{1}{4}T = 6$. Ou seja, o vidro de remédio da Senhora Dolores tem $T = 4 \times 6 = 24$ comprimidos.

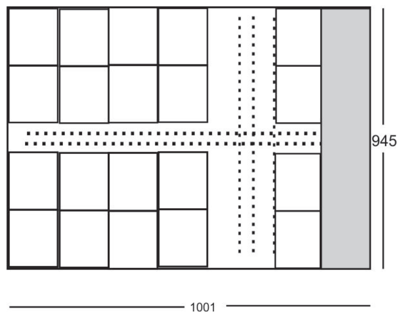
NÍVEL II

Na floresta onde vivem os Smurfs, Gargamel plantou 1280 pinheiros, cada um com 1 metro de diâmetro. A floresta é um campo retangular de dimensões 1001×945 metros. Vovô Smurf gostaria de construir nele sete campos de tênis, cada um deles de dimensões 20×34 metros.

Vovô Smurf conseguirá fazer a construção sem derrubar nenhuma árvore, indepemdente de como Gargamel plante as árvores?

SOLUÇÃO

A resposta é afirmativa, o vovô Smurf conseguirá fazer a construção desejada. Divida a floresta em k retângulos de dimensões 35×21.

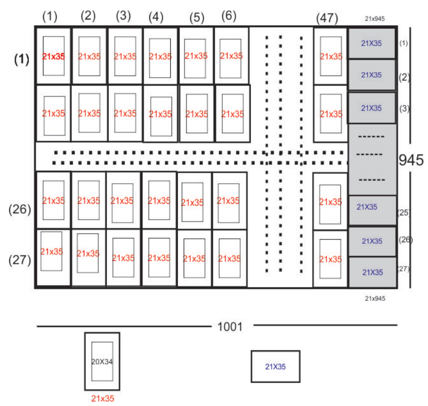


Para cada pinheiro plantado por Gargamel, associe o retângulo que contém o centro do pinheiro, se o pinheiro pertencer a mais de um retângulo, associe qualquer um deles. Dessa maneira, em cada retângulo que não está associado a nenhum pinheiro, é possível construir um campo de tênis no subretângulo central de dimensões 34×20. Observe que, $34 \times 20 = 1280$ Portanto, se $k \geq 1287$, vovô Smurf, pelo Princípio da Casa dos Pombos, realizará seu objetivo. E de fato, isso é possível, através da seguinte divisão:

(i) Uma vez dividida a floresta em retângulos, divida o "subtabuleiro" 945×980 em 1260 tabuleiros de dimensões 21×35. Observe que $\frac{945}{21} \times \frac{980}{35} = 45 \times 28 = 1260$;

(ii) Uma vez dividida a floresta em retângulos, divida o retângulo restante, de dimensões 21×945 em 27 subretângulos de dimensões 21×35, veja figua a seguir.

Isto conclui a prova.



NÍVEL III

Diga, justificando, se é possível pintar cada um dos pontos (x, y) do plano cartesiano, onde x, y são números inteiros, com uma das três cores- vermelho, branco ou azul-, de modo que a pintura satisfaça as seguintes condições:

(a) Cada cor ocorre uma infinidade de vezes em infinitas retas paralelas ao eixo-X, e
(b) Nenhum terno de pontos, com cada ponto do terno pintado de cor distinta da dos outros dois, seja colinear.

SOLUÇÃO

É possível fazer a pintura nas condições do problema. Para isso, pinte de vermelho todo par (x, y), com x, y números inteiros, se $x + y$ é par; de branco todo par de inteiros (x, y), com x ímpar e y par; de azul todo par de inteiros (x, y), com x é par e y é ímpar.

É fácil ver que a condição (a) é satisfeita. Vamos provar a seguir que a pintura feita deste modo satisfaz também a condição (b).

Suponha que o par (x_1, y_1) seja vermelho, (x_2, y_2) branco e (x_3, y_3) azul. Temos que mostrar que essess três pontos não estão sobre uma mesma reta. Agora, observe que, pelas hipóteses do problema, os números inteiros $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ possuem paridades distintas. Do mesmo modo, os números inteiros $x_3 - x_2$ e $y_3 - y_2$ são ambos ímpares. Portanto, podemos concluir que:

$$(y_2 - y_1) \times (x_3 - x_2) \neq (y_3 - y_2) \times (x_2 - x_1),$$

o que nos leva a concluir que $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Mas, o lado esquerdo da desigualdade acima é igual ao coeficiente angular da reta que liga os pontos (x_3, y_3) e (x_2, y_2) e o lado direito é o coeficiente angular da reta que liga os pontos (x_2, y_2) e (x_1, y_1). Portanto, os três pontos, pintados com cores distintas, não estão alinhados, o que conclui a prova.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $f(x)$ uma função real contínua definida no intervalo $[0, a]$, onde a é um número real positivo tal que $f(x) + f(-x)$ não se nula em $[0, a]$.

Calcule a integral

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(-x)} dx.$$

SOLUÇÃO

A resposta é $\frac{1}{a}$. Chame $I = \displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(-x)} dx.$ e $J = \displaystyle\int_0^a \frac{f(x-a)}{f(x) + f(-x)} dx.$

Observe que $I + J = \displaystyle\int_0^a 1 dx = a$ (*). Por outro lado, na expressão de I, mudando a variável x por $a - x$, obtemos $I = J$. Portanto, de (*), podemos concluir que $I + I = a$. Ou seja, $I = \frac{1}{a}$