Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

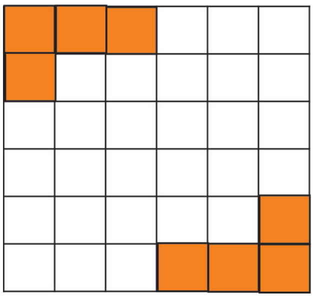
Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 24 - Data 19/08/2013

NÍVEL I

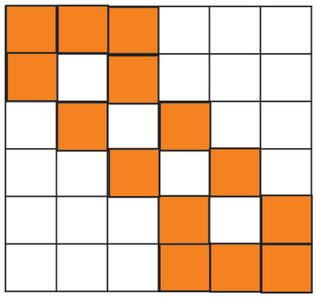
Na figura a seguir, temos um tabuleiro 6×6, que tem alguns quadrados unitários pintados. Queremos pintar K quadrados unitários a mais, de tal forma que em cada linha e em cada coluna do tabuleiro tenhamos pelo menos 2 quadrados unitários pintados.



Qual é o menor valor que pode assumir o número natural K?

SOLUÇÃO

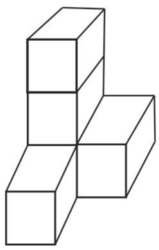
Observe que a segunda e a quinta linhas, contadas de cima para baixo, possuem somente 1 quadrado unitário pintado, Logo, devemos pintar no mínimo 1 quadrado unitário a mais em cada uma delas. Além disso, a terceira e a quarta linhas não possuem quadrados unitários pintados. Então devemos pintar pelo menos dois quadrados em cada uma dessas linhas. Portanto, devemos pintar no total pelo menos $1 + 1 + 2 + 2 = 6$ quadrados unitários. A resposta não é única, no desenho a seguir vemos uma possibilidade de efetuar a pintura satisfazendo ao problema.



NÍVEL II

Para pintar um cubo gasta-se 5 reais em pintura.

Quantos reais se gastará para pintar cinco cubos, cada um deles com a medida da aresta sendo o triplo da medida da aresta do cubo anterior, e estando os cubos formando a figura a seguir?



Considere que se deve pintar todas as faces exteriores, incluindo a base do sólido.

SOLUÇÃO

A resposta é 165 reais. A primeira coisa que temos que fazer é encontrar a quantidade de faces que temos que pintar. De forma natural, vamos contá-las segundo sua posição na figura: na frente, atrás, à esquerda, à direita, em cima e abaixo.

Assim, o número de faces a serem pinatadas é: $4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 = 22$.

Agora, observe que, pelos dados do problema, em cada uma dessas faces, as arestas possuem o triplo da medida da aresta do cubo original. Portanto, a área de cada face é igual a 9 vezes a área de cada face do cubo original. Com isso, deduzimos que a área total das faces a serem pintadas é igual a $22 \times 9 = 198$ faces do cubo original. Além disso, pelos dados do problema, para pintar 6 faces gasta-se 5 reais. Portanto, o custo total será dado por $\frac{198 \times 5}{6} = 165$ reais.

NÍVEL III

Usando as cores vermelhas, verde e azul, pinta-se todos os pontos do plano cartesiano que possuem as duas coordenadas inteiras. A pintura é feita de forma que haja pelo menos um ponto de cada cor.

Demonstre que, independente da pintura feita, existem três pontos, X, Y, Z, pintados com cores distintas, e tais que a medida do ângulo $A\hat{V}P$ é igual a 45^0.

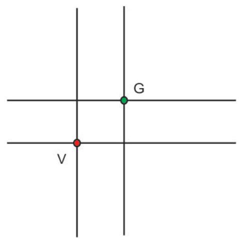
SOLUÇÃO

Inicialmente, vamos estabelecer uma notação para facilitar o entendimento. Chamaremos de **Pontos Inteiros** aqueles pontos do plano que possuem ambas as coordenadas inteiras e chamaremos **Diagonais** as retas de declividade iguais a ± 1.

Inicialmente, vamos mostrar que: *Existem dois pontos inteiros consecutivos sobre uma diagonal que tem cores distintas.*

Suponha o contrário. Isto é, em cada diagonal todos os pontos seriam de mesma cor. Como consequência, todos os pontos inteiros (x, y), com $x + y$ par devem ter a mesma cor (pois estão em diagonais), e todos os pontos inteiros (x, y), com $x + y$ ímpar devem ter a mesma cor também. Portanto, todos os pontos do plano teriam sido pintados usando no máximo duas cores, que uma contradição com as hipóteses do problema. Logo, em uma diagonal há pontos pintados com as três cores.

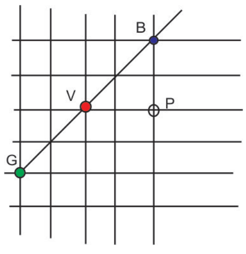
Agora, sem perda de generalidade, podemos assumir que os pontos sobre uma diagonal seriam pintados de vermelho (V) e verde (G) e estão dispostos na forma da figura a seguir.



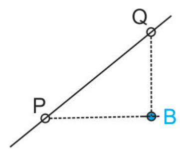
Vamos dividir o problema em dois casos:

Caso 1 - Existe um ponto azul, B, sobre a reta VG. Suponha, sem perda de generalidade que o ponto V está entre os pontos G e B.

Agora, seja P um ponto que está na mesma linha que V e na mesma vertical que B. Se P é verde, tomamos o ângulo $B\hat{V}P$, cuja medida é 45^0. Se P é vermelho, tomamos o ângulo $V\hat{B}P$, cuja medida é 45^0, veja figura a seguir.



Caso 2 - A reta VG contém somente pontos vermelhos, V, ou verdes, G. Tomamos um ponto azul, B, que está fora da reta VG, e traçamos por B uma reta horizontal e uma reta vertical, que cortará a reta VG nos pontos P e Q, respectivamente., veja figura a seguir.



Se P e Q são de cores distintas, tomamos o ângulo $B\hat{P}Q$, com vértices de cores distintas e medindo 45^0, o que resolve o problema.

Se P e Q tem as mesma cores, digamos que ambos sejam vermelhos, V, pelo resultado anterior, a diagonal PQ teria um ponto verde, G. Se G está na vertical abaixo de Q, tomamos o ângulo $B\hat{Q}G$ medindo 45^0. Se G está acima de Q, tomamos o ângulo $B\hat{G}$, medindo 45^0. Com isso conclui-se a resolução do problema.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Encontre o volumedo do tetraedro $ABCD$, com $A = (F_k, F_{k+1}, F_{k+2}),\ B = (F_{k+3}, F_{k+4}, F_{k+5}),\ C = (F_{k+6}, F_{k+7}, F_{k+8}),\ D = (F_{k+9}, F_{k+10}, F_{k+11})$, onde F_i é o i-ésimo número de Fibonacci na sequência: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$.

SOLUÇÃO

A resposta é zero. A fórmula geral da sequência de Fibonacci é $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$. Portanto, quaisquer três números consecutivos na sequência de Fibonacci satisfaz a equação $x + y = z$, que é a equação de um plano no espaço tridimensional. Logo, os quatro vértices do tetraedro são todos coplanares, pertencentes ao plano $x + y = z$, e o volume do tetraedro é zero.