OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SOLUÇÃO DA LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO N$^{\underline{0}}$ 03 - 2011
NÍVEIS I e II

(A solução da lista foi feita pelo nosso colaborador Lucas Silva, engenheiro eletrônico de formação e, atualmente, trabalhando na sede da Petrobras em Natal. Lucas é um ex-participante de Olímpiadas de Matemática, no Estado do Ceará, quando estudava no Colégio Farias Brito, em Fortaleza)

Problema 1
Yolanda conversava com seu irmão sobre o que ela fez hoje na aula de Matemática.

> *Yolanda disse, "Damião, hoje usei blocos na minha aula de Matemática.*
> *Quando agrupei os blocos de dois em dois, sobrou um bloco.*
> *Quando agrupei os blocos de três em três, sobrou um bloco.*
> *E, quando agrupei os blocos de quatro em quatro sobrou um bloco"*

Damião perguntou: "Quantos blocos você tinha?"

Qual foi a resposta de Yolanda?
Explique como você encontrou sua resposta.
Solução:

Uma resposta possível (a menor) é 13. Bem, quando Yolanda fala: "Agrupei os blocos 2 a 2 sobrou 1" quer dizer que a quantidade de blocos que ela tinha é um múltiplo de 2 mais 1. Analogamente, quando ela faz o agrupamento 3 a 3 ou 4 a 4 sempre sobra um bloco, então o número de blocos deve ser múltiplo de 3 mais 1 e múltiplo de 4 mais 1. Logo, a quantidade total de blocos deve ser um múltiplo de 2, 3 e 4 MAIS 1. Num caso particular, o menor valor da quantidade de blocos é o
MMC(2,3,4) + 1 = 12+1= 13.
Outras respostas são os múltiplos inteiros positivos do MMC(2, 3, 4) mais 1. Por exemplo, 25 = 2.12 + 1; 37 = 3.12 + 1 etc.

Problema 2
Na casa de Sally estava havendo uma festa.
Na primeira vez que a campainha da casa tocou, 1 convidado entrou.
Na segunda vez que a campainha tocou, entraram 3 convidados.
Na terceira vez que a campainha tocou, entraram 5 convidados.
Na quarta vez que a campainha tocou, entraram 7 convidados.
E foi desta maneira que os convidados chegaram. Cada vez que a campainha tocava, entravam 2 convidados a mais do que o último grupo imediatamente anterior.

(a) Quantos convidados entraram no décimo toque da campainha?
(b) Se 99 convidados entraram juntos, qual foi o número do toque da campainha?

Solução:

Vamos contar! Na primeira vez que a campainha tocou entrou 1 convidado. Isso é equivalente a dizer que na vez **1** que a campainha tocou entrou 2 x **1**-1=1 convidados. Na segunda vez (ou vez 2) entraram 2 convidados a mais que a vez anterior (vez 1), logo na vez **2** entraram 2 x 1-1 + 2 = 2 x 1+2-1=2*__2__-1 = 3 convidados. Bem, na terceira vez (ou vez **3**) entraram 2 convidados a mais que o anterior, ou seja, 2 x 2-1+2 = 2*2+2-1= 2 x **3**-1 = 5 convidados. Observe que, continuando o procedimento, a cada vez o número de convidados que entra é igual a duas vezes o número da "vez" menos 1, ou seja, na vez 10, entrarão 2 x 10-1 convidados.

a) Verificamos que na vez **10**, entraram 2 x **10** – 1= 19 convidados.

b) Seja n a vez em que 99 convidados entraram juntos, então, conforme explicado anteriormente, 2 x n-1=99 o que implica que 2 x n=100 e n =50.

Resposta: Quinquagésima vez.

Problema 3

Um cubo sólido de plástico, com aresta medindo 1 cm, pesa uma grama.

Quanto pesará um cubo sólido do mesmo plástico com aresta medindo 2 cm?

Solução:

Sabemos que o peso de um material depende do tipo de material e do volume. Então como estamos com o mesmo material, a massa vai ser proporcional ao volume. O volume de um cubo de aresta medindo a é $V=a^3$. Então para aresta igual a 1 cm temos um volume de $a^3=1^3=1$ cm^3. Para uma aresta medindo 2 cm, temos um volume igual a $a^3 = 2^3 = 8$cm^3. Logo, temos a regra de três:

Peso ------ Volume

1 g ------- 1 cm^3

x g ------- 8 cm^3 .

Daí, temos que x Solução:

Sabemos que o peso de um material depende do tipo de material e do volume. Então como estamos com o mesmo material, a massa vai ser proporcional ao volume. O volume de um cubo de aresta medindo a é $V=a^3$. Então para aresta igual a a=1 cm temos um volume de $a^3=1^3=1$ cm^3. Para uma aresta de 2cm temos um volume de $a^3=2^3=8$cm^3.

Logo temos a regra de três:

Peso ------ Volume

1 g ------- 1 cm^3

x g ------- 8 cm^3 .

Daí, temos que x x 1 = 1 x 8, com x = 8 g.

Problema 4

Um grupo de 9 crianças comeram 3 pizzas de mesmas dimensões. O grupo era formado por 7 meninas e 2 meninos. As 7 meninas comeram igualmente 2 das pizzas e os meninos comeram iguais quantidades da outra pizza.

Diga, justificando, se cada menina comeu a mesma quantidade que cada menino.

Solução:

Para comparar a quantidade de pizza que cada criança comeu, então devemos calcular o quanto de pizza uma menina comeu e o quanto um menino comeu. Para as meninas temos:

Meninas -------- # Pizzas

7 --------- 2

1 -------- x. Então, x x 7 = 2 x 1, com x = 2/7 de pizza. Isso significa que cada menina comeu o equivalente a fração 2/7 ~ 0,285 de uma pizza.

Meninos -------- # Pizzas

2 --------- 1

1 -------- y. Então, y x 2 = 1 x 1, com y = 1/2 de pizza. Isso significa que cada menino comeu o equivalente a fração ½ = 0,5 de uma pizza.

Como ½ > 2/7, ou 0,5 > 0,285, temos que cada menina comeu menos pizza que cada menino.

Problema 5

Numa feira, Ângela vendeu chapéus. Na primeira semana vendeu 9 chapéus; na segunda semana vendeu 3, e na terceira vendeu 6.

Quantos chapéus vendeu Ângela na quarta semana, se a média de chapéus vendidos foi 7?

Solução:

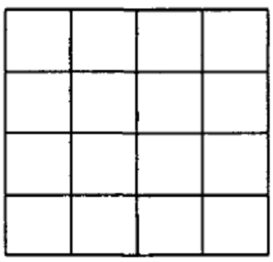
Temos que a média de números naturais é igual à soma desses números dividido pela quantidade de números. Então, dados x,y e z números naturais, a média é igual a

$$\frac{(x+y+z)}{3}.$$

Seja x a quantidade de chapéus que Ana vendeu na quarta semana. Se a média de venda foi 7, e temos 4 números: 9, 3, 6 e x. Então $\frac{(9+3+6+x)}{4} = 7 \Rightarrow 18 + x = 4 \times 7 = 28 \Rightarrow x = 10$

Problema 6

Considere um tabuleiro 4 x 4, veja figura a seguir.

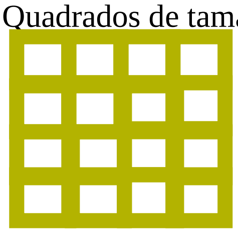


Diga, justificando, quantos quadrados, com lados paralelos ao bordo do tabuleiro, existem no tabuleiro dado.

Solução:

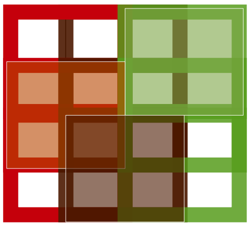
Um tabuleiro 4x4 pode conter quadrados com lados paralelos aos bordos do tabuleiro dos tamanhos seguintes: 1x1, 2x2, 3x3 e 4x4. Então, para cada dos tamanhos dos quadrados, vamos contar a quantidade deles.

Quadrados de tamanho 1x1:



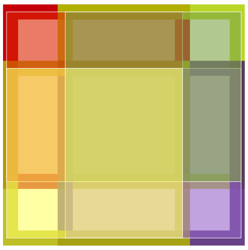
. Total de 16 Quadrados.

Quadrados de tamanho 2x2:



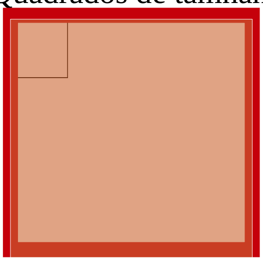
. Total de 9

Quadrados de tamanhos 3x3:



Total. 4.

Quadrados de tamnaho 4x4:



Total: 1.

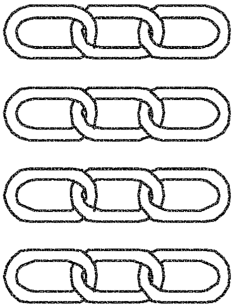
Logo, o total de quadrados pedidos é: 1+4+9+16 = 30..

Problema 7
Onze garotas e *n* rapazes foram colher limões. Todos os jovens colheram no total um número de limões igual a $n^2 + 9n - 2$. Sabe-se que todos os jovens colheram um mesmo número de limões.
Existem mais garotas ou mais rapazes dentre esse grupo de jovens?
Solução:

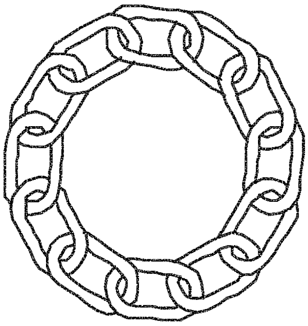
Se temos 11 meninas e n meninos, temos um total de n + 11 jovens. Se todos os jovens juntos colheram $n^2 + 9 \times n - 2$ e cada garoto colheu uma mesma quantidade (inteira) de limões então, necessariamente n + 11 deve ser divisor de $n^2 + 9 \times n - 2$. Ou seja, numa linguagem matemática: $(n + 11) \mid (n^2 + 9 \times n - 2)$. (O símbolo | significa divide)
Devemos tentar fatorar a expressão$n^2 + 9 \times n - 2$em termos de n+11 para tentar encontrar os valores possíveis de n. Observe que $n^2 + 9 \times n - 2 = (n + 11) \times (n - 2) + 20$, então $(n + 11) \mid (n^2 + 9 \times n - 2) \Leftrightarrow (n + 11) \mid ((n + 11) \times (n - 2) + 20) \Leftrightarrow (n + 11) \mid 20$. Então, n+11 deve ser um divisor de 20. Como n > 0, então n+11 > 11. Bem, os divisores positivos de 20 são {1,2,4,5,10,20}, logo n+11=20. Daí, n=9.

O número de meninas é 11 e de meninos é 9. Portanto, há mais garotas que rapazes.

Problema 8 (No enunciado há um erro. Em vez de do custo ser 12 é, de fato, 15 reais)
São dados quatro pedaços de uma corrente, cada um deles tendo três argolas, veja figura a seguir.



O custo para abrir e fechar cada um desses pedaços é 2 reais e 3 reais, respectivamente. No início, todos eses pedaços são fechados. Sua meta é juntar esses pedaços para formar uma corrente circular, veja figura a seguir, a um custo de não mais do que **15** reais.



Explique como você vai proceder para atingir sua meta.
Solução:

Basta observar que, se eu abrir três elos de um pedaço de corrente vou gastar 2 x 3 = 6 reais. Se ligarmos dois elos com cada elo aberto, vamos gastar 3 x 3 = 9 reais.
Neste caso, o custo total é 6 + 9 = 15 reais.

Problema 9
Na aula de Matemática, os estudantes foram divididos em grupos. Cada grupo trabalhou com blocos plásticos de mesmas dimensões, veja figura a seguir.

A tarefa era formar torres de altura correspondente a quatro blocos, mas usando somente blocos de duas cores: preto e vermelho.
Duas torres são iguais se todos os respectivos blocos são de mesma cor.

(a) Quantas torres diferentes cada grupo de estudantes poderia formar?
(b) Se as torres fossem de altura correspondente a cinco blocos, quantas torres distintas cada grupo de estudantes poderia formar?
(c) Usando blocos de três cores: preto, vermelho e verde, quantas torres distintas, com quatro blocos, cada grupo de estudantes poderiam formar? E se a altura das tores fosse cinco blocos?

Solução:

(a) Como as torres tem altura correspondente a quatro blocos, e os blocos são de duas cores, então o primeiro bloco pode ser de dois tipos diferentes: preto ou vermelho. O mesmo acontece com os outros blocos. Assim, o números de torres distintas é igual a 2 x 2 x 2 x 2 = 16.
(b) Neste caso, usando o mesmo raciocínio, o número de torres distintas é igual a
2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32.
(c) Usando blocos de três cores: preto, vermelho e verde, o primeiro bloco pode ser de três modos distintos, dependendo da cor. O mesmo ocorre com os demais blocos. Assim, o número total de torres distintas é igual a 3 x 3 x 3 x 3 = 81.