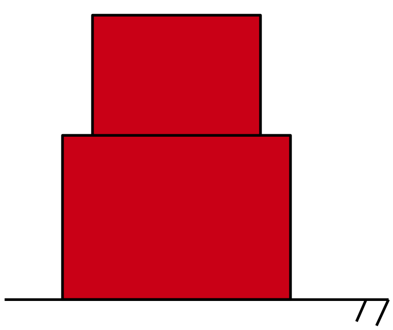
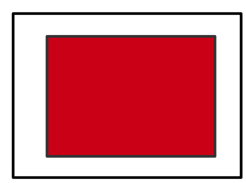
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SOLUÇÃO DA LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO Nº 02 - 2011
NÍVEL III

Esta solução foi feita pelo nosso colaborador, Lucas Silva, engenheiro eletrônico de formação e, atualmente, trabalhando na sede da Petrobras em Natal. Lucas é ex-estudante Olímpico do Estado do Ceará, quando aluno do Colégio Farias Brito, de Fortaleza

Problema 1
Coloca-se no chão plano uma caixa cúbica, de aresta medindo 1 m. Uma segunda caixa cúbica, de aresta 23 m é colocada sobre a primeira, de modo que o centro da segunda caixa fica diretamente acima do centro da primeira. Sem mover qualquer uma das caixas, um pintor pinta de vermelho toda a superfície do conjunto das caixas.

Qual é o total da área vermelha?
Solução:

O problema pede para calcular a área pintada dois cubos na configuração proposta o que é o mesmo de calcular a área externa da superfície proposta. Seguem abaixo os desenhos em perfil e olhando de cima dos cubos:

Pois bem, sejam Ag e Ap, as áreas das faces dos cubos grande e pequeno respectivamente. Logo, Ag = 1m*1m=1m² e Ap=2/3 m * 2/3 m = 4/9 m². Observe que, todo cubo tem seis faces. Logo, para o cubo grande temos 4 faces expostas, 1 face tocando o chão e a outra face suportando o cubo menor. Adicionalmente, para o cubo menor temos 5 faces expostas e uma face em contato com o cubo maior. Daí, é fácil perceber que a área total pintada é igual a 4*Ag+5*Ap+(Ag-Ap), onde Ag-Ap representa a área externa a interseção entre as faces dos cubos, representada pela área hachurada na figura acima. Logo, a área total é 5*Ag + 4*Ap= 5*1 + 4*4/9 = 61/9 m².

Problema 2
Matias pretende arrumar os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 numa linha, de modo que o número 2 fique sempre à esquerda do 4 e o 4 esteja sempre à esquerda do 6.

De quantos modos Matias pode arrumar os números dados?
Solução:

Considere a figura abaixo.

______ ______ ______ ______ ______ ______
P1 P2 P3 P4 P5 P6

Pelo fato de que o 2 sempre deve estar à esquerda do quatro e o quatro à esquerda do 6, então o número 2 só poderá ficar nas posições P1, P2, P3 e P4, pois há sempre no mínimo dois números a sua direita 4 e 6. Portanto, vamos começar a contar.

a) Se o 2 tiver na posição P4. Necessariamente o 4 está na P5 e o 6 está na P6. Daí, sobram 3 números e 3 posições. A contagem fica 3*2*1 = **6** possibilidades.

b) Se o 2 tiver na posição P3. Daí, o 4 pode estra nas posições P4 ou P5. Se 4 está na P5, implica 6 está na P6, sobrando 3 espaços e 3 números, ou seja, 6 possibilidades de novo. Já se o 4 está na P4, o 6 pode, indiferentemente, está na P5 ou P6. Em qualquer caso, restam 3 espaços e 3 números com 6 possibilidades cada caso. Daí, para o 4 na P4 temos 2*6 = 12 possibilidades. Nesse caso, temos o total de 12 + 6 = **18** possibilidades.

c) Se o 2 tiver na posição P2. Daí o 4 pode estar nas posições P3, P4 e P5. Se o 4 tiver na P5, temos o caso análogo ao b, com 6 na posição P6 e temos 3*2*1 = 6 possibilidades para os 3 números e posições restantes. 4 na P4 caso análogo ao b) com 12 possibilidades. Já o 4 na P3, o 6 pode ocupar 3 posições (P4, P5 e P6), cada posição deixa 3 números e 3 espaços com o total de possibilidades 3*6 igual a 18 possibilidades. Daí, no caso c temos 6 + 12 + 18 = **36** possibilidades.

d) Finalmente, para o 2 na posição P1, teremos uma repetição no raciocínio dos casos anteriores, com a variação da posição do 4 e do 6. A contagem nesse caso fica 6 + 2*6 + 3*6 + 4*6 = **60** possibilidades.

Daí, o total de possibilidades é 60+36+18+6 = 120.

Problema 3.
Seja S um número inteiro que é um quadrado perfeito. Sabe-se que S, quando escrito na base 10, tem o dígito das dezenas igual a 3 mais o dígito das unidades.
Encontre todos os possíveis restos na divisão de S por 100.
Solução:

Resposta 96 e 41.
Qualquer número inteiro termina em 0, 1, 2, …ou 9. Daí, o quadrado de qualquer número termina em 0 (0^2), 1 (1^2), 4 (2^2), 9 (3^2), 6 (4^2), 5 (5^2), 6(6^2), 9 (7^2), 4 (8^2), 1 (9^2), 0 (0^2), o que é cíclico. As possíveis terminações de quadrados dos números são 0, 1, 4, 5, 6 e 9. Para os dígitos das dezenas ser 3 mais os dígitos das unidades, este não pode ser 9. Daí, restam os valores 0, 1, 4, 6. Daí, número S pode terminar em 96, 74, 41 e 30. Basta saber se essas terminações podem ser originadas do quadrado de algum número. Para terminar esse problema, vamos lançar mão do seguinte lema.

Lema 1. Todo número quadrado perfeito que é par é múltiplo de 4.
Prova. Seja n um quadrado perfeito e par. Se n é quadrado perfeito e par, existe um inteiro a tal que $n = a^2$. Se n é par existe um inteiro k tal que $n = 2*k$. Daí, $a^2 = 2*k$, só é possível se a for par, pois caso o

contrário, se a fosse ímpar a*a seria impar, absurdo. Logo existe z inteiro tal que a = 2*z. Portanto, $n = a^2 = 4*z^2$, é múltiplo de 4.

Bem, sabemos da regra de divisibilidade que um inteiro é divisível por quatro se seus últimos dois dígitos forem divisíveis por 4. Logo, nenhum número terminado com 30 ou 74 podem ser divisível por 4, pois, nem 30 nem 74 são divisíveis por 4. Daí, nenhum número ao quadrado pode terminar com 30 ou 74, eliminando essas duas possibilidades.

Resta agora analisar os números terminados com 41 e 96. Bem, os números $14^2 = 196$ e $21^2 = 241$ são exemplos de quadrados perfeitos que deixam restos 96 e 41 na divisão por 100, satisfazendo as condições do problema.

Problema 4.
Pinta-se com uma das cores azul, verde ou vermelho todo ponto do plano com coordenadas inteiras positivas (x, y) tal que $x \leq 19$ e $y \leq 4$.
Prove que, não importa qual a pintura feita, existe um retângulo (com os vértices nesses pontos) e lados paralelos aos eixos coordenados com todos os vértices de mesma cor.
Solução:

Como $1 \leq x \leq 19$ e $1 \leq y \leq 4$, há 4*19 = 76 pontos (x, y) possíveis de serem pintados com 3 cores. Os 76 pontos formam o quadriculado com 4 linhas e 19 colunas, conforme ilustração a seguir:

4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Pelo princípio das casas dos pombos[1], com 76 pontos e 3 cores existe pelo menos uma cor em pelo menos 26 pontos ($26 = [\frac{76}{3}]$onde [.] é o operador **menor** inteiro **maior ou igual** ao número sendo operado).

Observe que, para essa cor, há pelo menos uma coluna com 2 pontos pintados dessa cor, pois, caso contrário, só teríamos 19 pontos pintados (devemos ter 26 pontos).

Outra observação é que para formar um quadriculado, então deveremos ter duas colunas com dois pontos de cada coluna na mesma posição relativa, por exemplo: Se na coluna 3, a posição dos pontos verdes é 1 e 4, se existir outra coluna com a mesma posição dos pontos verdes (ou seja, coluna 15 com posição 1 e 4) então teremos um quadrado formado.

Sem perda de generalidade vamos supor que essa cor seja vermelho. Vamos analisar os casos.

---

[1]. Princípio das Casas dos Pombos. O princípio **do pombal** ou **princípio da casa dos pombos** é a afirmação de que se *n* pombos devem ser postos em *m* casas, e se $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo. Matematicamente falando, isto quer dizer que se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva. Uma versão generalizada declara que, se *"n"* objetos distintos para ser alocados à *"m"* recipientes, então pelo menos um recipiente deve conter não menos que [n/m] objetos, onde [x] denota o menor inteiro igual ou superior a x (a função tecto).

Caso 1. Uma coluna com 4 pontos vermelhos. Para não formar um quadriculado, todas as outras colunas só podem ter um ponto vermelho. Daí, teríamos 18*1+1*4 = 22 pontos, o que é menor que os 26 pontos, absurdo. Logo, nesse caso necessariamente há a formação de um quadriculado.

Caso 2. Uma coluna com 3 pontos vermelhos. Se há outra coluna com 3 pontos, então formaríamos um quadriculado, necessariamente. Se não há, sobram 26-3=23 pontos para 18 colunas ⇒há 5 colunas com dois pontos e as outras com um ponto apenas. Para não formar um quadriculado, nas colunas com dois pontos devemos ter um ponto na mesma linha do ponto vazio da coluna com 3 pontos e o outro ponto em qualquer uma das outras 3 linhas. Daí, há $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{1} = 3$possibilidades. Como há 5 colunas com dois pontos então, necessariamente teremos 2 colunas com os dois pontos nas mesmas posições (linhas), formando o quadriculado.

Caso 3. Uma coluna com 2 pontos vermelhos. Nesse caso, como cada coluna tem no máximo dois pontos então teremos pelo menos 7 colunas com 2 pontos (Se tivéssemos apenas 6, teríamos 2*6 + 1*(19-6) = 25 pontos que é menor que 26 pontos). Como falamos anteriormente, para não formar o quadriculado, não podemos ter duas colunas com dois pontos em cada nas mesmas posições. O número de maneiras de arranjar dois pontos em quatro espaços é $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{2} = 6$possibilidades. Bem, como há 7 colunas com dois pontos, pelo princípio das casas dos pombos, há pelo menos duas colunas em que os dois pontos estão na mesma posição, formando o quadriculado.

Em qualquer dos casos, formamos o quadriculado terminando a demonstração desse problema.

Problema 5.
No dia do aniversário de João em 2010, uma pessoa perguntou a idade dele. João respondeu: "*se eu não contasse os sábados e os domingos da minha vida, eu teria 40 anos de idade*".

Em que ano João nasceu?
Solução:

Numa semana há 7 dias, em que 2 são fim de semana. Ou seja, aproximadamente 2/7 dos dias em um ano são fins de semana e 5/7 dos dias são dias de semana. João afirmou que se contasse apenas os dias de semana, ele teria 40 anos. Daí, suponha que ele tenha x anos. Então, $40 = \frac{5\times x}{7}$, então x = 56 anos. Como estamos em 2010, joão nasceu em 2010- 56 que é igual 1954.

Problema 6.
Uma equipe esportiva composta por 6 jogadoras está disputando uma partida de 2 tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo podem ser feitas até 3 substituições e, para isto, o técnico dispõe de 4 jogadoras no banco.

Quantas formações distintas podem iniciar o segundo tempo?
Solução:

Há 6 jogadoras em campo e devo fazer até 3 substituições com 4 jogadoras no banco. Temos então 4 casos:
Caso 1. 0 substituições. Então temos a contagem, escolher 0 das 6 e trocar com 0 das 4:$\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0} \times \genfrac{}{}{0pt}{}{4}{0} = 1$

Caso 2. 1 substituição. Então temos a contagem, escolher 1 das 6 e trocar com 1 das 4:$\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{1} \times \genfrac{}{}{0pt}{}{4}{1} = 24$

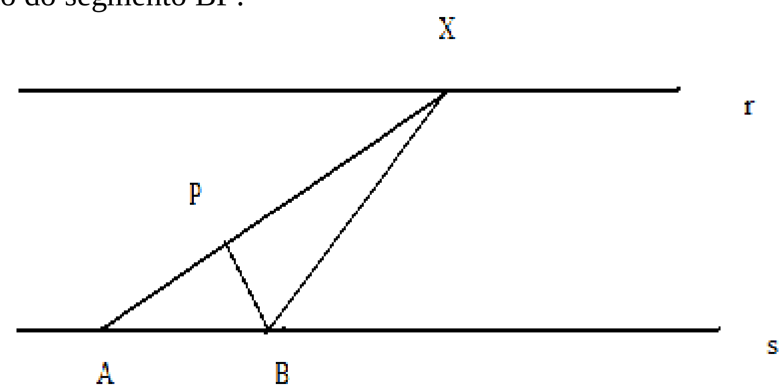
Caso 3. 2 substituições. Então temos a contagem, escolher 2 das 6 e trocar com 2 das 4:$\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{2} \times \genfrac{}{}{0pt}{}{4}{2} = 90$

Caso 4. 3 substituições. Então temos a contagem, escolher 3 das 6 e trocar com 3 das 4:$\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{3} \times \genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3} = 80$

Logo o total de possibilidades é 80+90+24+1 = 195 possibilidades.

Problema 7.
Na figura abaixo, as retas *r* e *s* são paralelas a uma distância 2 uma da outra. AB é um segmento unitário contido em *s*, X é um ponto de *r* com $AX = 5$ e P é o pé da perpendicular baixada de B sobre AX.

Qual é o comprimento do segmento BP?



Solução:

Temos da geometria plana que a área de um triângulo é a metade do valor da base vezes a altura relativa a base. Essa afirmação vale para qualquer lado do triângulo, ou seja, a área do triângulo é a metade do valor do lado vezes a altura relativa ao lado.
Esse problema é resolvido com os dois fatos citados acima. Temos para o triângulo ABX, que a área pode ser escrita como $\frac{\overline{AB}\times(Dist(X,AB))}{2}$. De maneira análoga, essa área pode ser escrita como, $\frac{\overline{AX}\times\overline{BP}}{2}$. A distância entre o ponto X e o lado AB é exatamente a distância entre as retas paralelas que contem o ponto X e o segmento AB, ou seja, a distância entre as retas r e s. Daí, $\overline{AB} \times Dist(X, AB) = \overline{AX} \times \overline{BP} \Rightarrow 1 \times 2 = 5 \times \overline{BP}. \therefore \overline{BP} = \frac{2}{5.}$

Problema 8.
Joaquim pagou *n* reais por cada uma das *m* canetas e *m* reais por cada um de *n* lápis, tendo gastado em média R$7,50 por ítem comprado. Em seguida, Joaquim observou que se cada caneta tivesse custado 1 real a menos e cada lápis tivesse custado 1 real a mais, ele teria pago, em média, R$7,75 por cada item comprado.

Determine a quantidade de canetas que Joaquim comprou.
Solução:

Vamos montar as equações desse problema. Comprando m canetas por n reais cada e n lápis por m reais cada então gastamos m*n+n*m por m+n itens. Logo, $\frac{(m\times n+n\times m)}{(m+n)} = 7{,}50$. Da mesma forma, se um lápis tivesse custado 1 real a mais e a caneta 1 real a menos a equação fica $\frac{(m\times(n-1)+n\times(m+1))}{(m+n)} = 7{,}75$. Temos duas equações e duas incógnitas, então vamos tentar resolvê-las. Rearranjando os valores, temos as equações:
$\begin{cases} 2\times m\times n = 7{,}5\times(m+n) \\ 2\times m\times n+n-m = 7{,}75\times(m+n) \end{cases}$. Subtraindo a equação 2 pela 1 temos $n-m = 0{,}25\times(m+n) \Rightarrow 4\times(n-m) = m+n \Rightarrow 3\times n = 5\times m \Rightarrow n = \frac{5\times m}{3}$. Substituindo n na equação 1, temos

$2\times m\times(\frac{5\times m}{3}) = 7{,}5\times(m+(\frac{5\times m}{3})) \Rightarrow \frac{10\times m^2}{3} = 7{,}5\times(\frac{8\times m}{3}) \Rightarrow 10\times m^2 = 60\times m \underset{(m\neq 0)}{\Rightarrow} m = 6$.
Joaquim comprou 6 canetas.

Problema 9. (Corrigimos o enunciado original, no que tange a propriedade (i))
Seja **N** o conjunto dos números naturais. Encontre todas as funções f :**N** →**N** tais que:
(i) $f(n+m) = f(n)\,.\,f(m)$, para todo $m,n \in$ **N**;
(ii) a equação $f(f(n)) = (f(n))^2$ admite uma solução $_o n \in$ **N** .
Solução.

Nesse problema temos que $\forall m,n \in \mathbb{N} f(m+n) = f(m)\times f(n)$, então para $m = n = 1 \Rightarrow f(1+1) = f(1)\times f(1) \Rightarrow f(2) = f(1)^2$. Fazendo m=2 e n=1, temos que $f(2+1) = f(2)\times f(1) \Rightarrow f(3) = f(1)^2\times f(1) = f(1)^3$. É fácil verificar que realizando esse passo n vezes temos que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1)^n$.

Considere que $f(1) = K, para algum K \in \mathbb{N}$. Vamos encontrar os valores de K para que a condição 2, ou seja, $\exists n_0 \in \mathbb{N} solução de f(f(n)) = (f(n))^2$.Daí, temos que $K^{K^n} = (K^n)^2 = K^{2\times n}$.Uma solução natural desse sistema é K=1. Nesse caso a solução da função é $f(n) \equiv 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Caso K>1, devemos encontrar os valores de K tal que $K^{K^n} = K^{2\times n} \Rightarrow K^n = 2\times n$, tem solução para algum$n \in \mathbb{N}$. Se $K \geq 3$, temos que
$K^n - 1 = (K-1)\times(1+K+K^2+\ldots+K^{n-1}) \Rightarrow K^n - 1 > (3-1)\times[\underbrace{(1+1^1+\ldots+1^{n-1})}_{(n \text{times})}] > 2\times n.:$

$$K^n > 2\times n+1 > 2\times n.$$

Daí, para K>=3 $not\exists n_0 \in \mathbb{N} solução de f(f(n)) = (f(n))^2$.

Para K=2, temos a solução de $f(f(n)) = (f(n))^2 \Rightarrow 2^{2^n} = 2^{2\times n} \Rightarrow 2^n = 2\times n \Rightarrow n = 2.$.Ou seja, $n_0 = 2$, satisfaz a equação 2 do problema. Logo a solução é $f(n) = 2^n$.

Portanto temos duas soluções: $f(n) \equiv 1, \forall n \in \mathbb{N}$ou $f(n) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.