**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE**
**SOLUÇÃO DA LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO N$^{\underline{0}}$ 04 - 2011**
**NÍVEIS I e II**

(A solução da lista foi feita pelo nosso colaborador Lucas Silva, engenheiro eletrônico de formação e, atualmente, trabalhando na sede da Petrobras em Natal. Lucas é um ex-participante de Olímpiadas de Matemática, no Estado do Ceará, quando estudava no Colégio Farias Brito, em Fortaleza)

**Problema 1**
Querendo comprar um casaco, Lisa se vê diante de um dilema. Duas lojas, uma próxima da outra, vendem um casaco de um mesmo fabricante e de mesmo modelo com os mesmos preços, mas com duas ofertas distintas de desconto. A loja A oferece uma oferta de 10% de desconto durante todo o ano em todos os seus bens, mas neste dia particular oferece um adicional de 20% sobre seu preço já com desconto anual. A loja B é simples e oferece um desconto de 30% naquele dia, a fim de permanecer competitiva.

Em que loja Lisa deve comprar o caso: loja A ou loja B?
Quantos pontos percentuais de diferença existem entre as duas opções a disposição de Lisa?
**Solução:**

Suponha que o preço do casaco seja 10. A loja A oferece 10% de desconto durante todo ano. Então, o preço do casaco com desconto de 10% na loja A fica $10 - 10 \times (\frac{10}{100}) = 9$. Na loja A, ainda é adicionado um desconto de 20% sobre esse valor. Então o preço do casaco na loja A fica $9 - 9 \times (\frac{20}{100}) = 9 - 1{,}8 = 7{,}2$.
Na loja B, o desconto é de 30%, então o preço do casaco na loja B é $10 - 10 \times (\frac{30}{100}) = 10 - 3 = 7$.
Logo, o preço do casaco na loja B é menor que o preço na loja A, e Lisa deve comprar o casaco na loja B.
A diferença de preço é 7,2-7=0,2 para o casaco de valor 10. Logo, em pontos percentuais temos:
$\frac{0{,}2}{10} = \frac{2}{100} = 2porcento.$

**Problema 2**
Numa sala de aula, o professor coloca um saco contendo um número suficiente de bolas vermelhas, brancas e azuis. Cada estudante retira do saco três bolas ao acaso.

Qual é o menor número de estudantes que garante que dois deles tiraram a mesma combinação de bolas, ou seja, o mesmo número de bolas de cada cor?
**Solução:**

Para resolver esse problema devemos saber qual é o número de combinações de retirar 3 bolas de um saco contento várias bolas que podem ser de três cores possíveis: vermelhas, brancas ou azuis. Veja que nesse problema, não importa a ordem de retirada das bolas e sim as cores (quantidades) das bolas que foram retiradas. Portanto, temos 3 casos:
i) Todas as bolas (3) com cores iguais. Nesse caso, como temos apenas 3 cores possíveis há 3

possibilidades. Total: 3.

ii) 2 cores iguais e 1 cor diferente. Para cada uma das 3 cores, temos 2 possibilidades (Exemplo: 2 bolas brancas: Branca, Branca, Vermelha ou Branca, Branca, Azul). Logo, temos o total de 3*2 = 6 possibilidades. Total: 6.

iii) Todas 3 cores diferentes. Só há uma possibilidade que é Branca, Azul, Vermelha. Total: 1.

Logo, temos um total de 3 + 6 + 1 = 10 combinações de retiradas das 3 bolas. Daí, com 10 + 1=11 estudantes, garantimos que pelo menos 2 retiraram a mesma combinação.

**Problema 3**

Num torneio de futebol tipo "eliminatório" (em cada partida há sempre um vencedor, no tempo regulamentar ou nos pênaltis, e a equipe derrotada é eliminada) participam 25 equipes,
Quantos jogos devem ser disputados até que seja conhecido o campeão do torneio?

**Solução:**

Temos inicialmente 25 equipes. A cada jogo, uma equipe é eliminada e uma equipe continua no torneio. Para conhecer o vencedor deveremos ter 24 equipes eliminadas e uma equipe vencedora. Como, em cada jogo devemos ter uma e apenas uma equipe eliminada, então para eliminar 24 equipes são necessários 24 jogos. Logo, em 24 jogos iremos conhecer o vencedor.

**Solução Alternativa:**

Dados que temos 25 times então, na primeira rodada, temos 12 jogos (12*2 times) e 1 time sobra para a próxima rodada. Após a primeira rodada só 12 times sobram com 1 que não jogou temos 13 times. Na segunda rodada, temos 6 jogos (6*2 times) e 1 time sobra para a próxima rodada. Logo, após a segunda rodada, sobram 6 times mais 1 que não jogou, ficando 7 times. Na terceira rodada, temos 3 jogos (3*2 times) e 1 time que não jogou. Logo após a terceira rodada temos 3 times mais um que não jogou totalizando 4 times. Na quarta rodada fazemos 2 jogos (2*2 times) sobrando 2 times para a final. Daí, fazemos o jogo final na ultima rodada, conhecendo o campeão. Total de jogos é 12+6+3+2+1 = 24 jogos.

**Problema 4**

Temos duas garrafas de 1 litro. Uma contém um litro de suco de uva e a outra, um litro de suco de maçã. Tomamos uma colher de sopa de suco de uva e derrame-a no suco de maçã. Tome uma colher de sopa desta nova mistura (suco de maçã e suco de uva) e derrame-a dentro da garrafa de suco de uva.

Há mais suco de uva na garrafa de suco de maçã ou mais suco de maçã na garrafa de suco de uva?

**Solução:**

Vamos montar o passo a passo do problema. Inicialmente, temos duas garrafas, uma de uva e outra de maça, cada qual com 1 litro de suco.

Início:
Garrafa de Uva: 1litro de suco de uva
Garrafa de Maçã: 1litro de suco de maçã

Suponha que a colher de sopa utilizada retire um volume **v** de líquido (v menor que 1 litro). Então, temos:

Passo 1: Uma colher de sopa do suco de uva é colocada na garrafa de maçã.

Garrafa Uva: 1-v de suco de uva puro.
Garrafa de Maçã: 1 litro de suco de maçã e v de suco de uva (1+v de mistura).

Passo 2: Uma colher de sopa da mistura é colocada na garrafa de uva. Nesse caso, é retirado um volume v da mistura. Então, através de regras de três poderemos saber qual o volume de suco de maçã de suco de uva dentro da colher de sopa. Pois bem, sejam x e y as quantidades de suco de uva e maça dentro da colher de sopa da mistura. Temos que: x + y = v. Mas, da mistura, temos:
Suco Uva:
v ------- 1+v
x ------- v. Daí, $v^2=x*(1+v)$. Logo, $x = v^2/(1+v)$.

Suco de Maçã:
1 ------- 1+v
y ------- v. Daí, v*1 = y*(1+v), então, y = v/(1+v).

Observe que $x + y = (\frac{v^2}{(1+v)}) + (\frac{v}{(1+v)}) = \frac{(v+v^2)}{(1+v)} = \frac{v\times(1+v)}{(1+v)} = v.$

Daí, no passo 2, temos
Garrafa de Uva: 1 – v + v = 1, onde de suco de uva temos 1 – v + x e de suco de maça temos y. Ou seja, temos v/(1+v) de suco de maçã na garrafa de uva.

Garrafa de Maçã: 1 + v – v = 1, onde de suco de maça temos 1 – y e de suco de uva temos v – x. Ou seja, temos $v - x = v - \frac{v^2}{(1+v)} = \frac{(v\times(1+v)-v^2)}{(1+v)} = \frac{(v+v^2-v^2)}{(1+v)} = \frac{v}{(1+v)}$. Ou seja, temos v/(1+v) de suco de uva na garrafa de maçã.

Portanto, as quantidades são iguais.

**Problema 5**
Em uma estante no porão da casa de Bárbara, há três caixas contendo bolas. Uma contém apenas bolas brancas, outra contém apenas bolas pretas e a outra contém uma mistura de bolas preta e bolas brancas. As etiquetas com os nomes "BRANCAS", "PRETAS" e “MISTURADAS” caíram das respectivas caixas e foram colocados de volta nas caixas erradas. Sem olhar, Barbara pode escolher uma caixa etiquetada erroneamente, retirar uma bola e, em seguida, corretamente etiquetar todas as três caixas.
A partir de que caixa deve Barbara selecionar uma bola: ou caixa BRANCAS,
ou caixa PRETAS,
ou caixa MISTURADAS?

**Solução:**

Seja, B, P e M os nomes referentes as caixas com bolas brancas, pretas e misturadas respectivamente. Inicialmente, temos que, todas as caixas estão com as etiquetas erradas, então, na caixa que está escrito B, só pode ter bolas P ou M, na caixa escrita P só pode ter bolas B ou M e na caixa M só pode ter bolas B ou P.

$$B \to P, MouP \to B, MouM \to B, P.$$

Digamos que foi escolhida a caixa branca. Daí, eu tenho a chance de tirar uma bola preta e eu não vou saber identificar se é uma caixa com bolas pretas ou bolas misturadas. Logo, não há como colocar a etiqueta certa. De maneira análoga, se for escolhida a caixa preta e for tirada uma bola branca, não é possível classificar corretamente a caixa.

Já se for escolhida a caixa misturada e tiramos uma bola branca, então a caixa branca está com a etiqueta misturada. Daí, já sabemos qual é a caixa branca. Na caixa com a etiqueta P (que só pode ser B ou M), já não pode ser a caixa branca, então só pode ser a caixa misturada. Logo, a caixa misturada está com a etiqueta P. Daí, por fim a caixa com a etiqueta B é a caixa com bolas pretas. Analogamente, se na caixa misturada for tirada uma bola preta, então, essa caixa é a caixa preta. Daí, na caixa com a etiqueta branca (que deve ser ou P ou M), não pode conter apenas bolas pretas, então deve ser a caixa misturada (M). Por fim a caixa com a etiqueta preta deve ser a caixa com as bolas brancas e termina o nosso problema.

**Problema 6**

Para ampliar a quantidade de suco de laranja em uma recipiente que contém 16 copos de suco, Alice decide o seguinte procedimento: no primeiro dia, ela vai beber apenas 1 copo do suco de laranja e, em seguida, enche o recipiente com água. No segundo dia, ela vai beber dois copos da mistura e, em seguida, novamente enche o recipiente com água. No terceiro dia, ela vai beber três copos da mistura e outra vez enche o recipiente com água. Ela vai continuar esse procedimento até o dia em que esvazia o recipiente depois de beber 16 copos da mistura no 16$_o$ dia.

No total, Alice bebeu quantos copos de água? Quanto de líquido Alice bebeu no total?

**Solução:**

Inicialmente, temos um recipiente com 16 copos de suco de laranja. Vamos montar os dias, para verificar o padrão da sequência de operações.

Dia 1: Alice toma 1 copo de suco. Como no recipiente tínhamos 16 copos de laranja e 0 de água, então, nesse dia, ela bebeu 1 copo de líquido sendo 0 de água (suco de laranja puro). Alice, preenche a garrafa com um copo de água (completa os 1 copo restante para os 16). Ou seja, na mistura temos adicionado 1 copo de água.

Dia 2. Alice toma 2 copos de líquido. Após tomar dois copos de líquido, ela adiciona dois copos de água. Então ela utiliza mais 2 copos de água.

Seguindo com o raciocínio no dia 15 ela toma 15 copos de uma mistura e preenche o recipiente com 15 copos de água, até que no dia 16 ela bebe toda a mistura. Pois bem, nesses 16 dias, Alice bebeu e repôs líquidos no recipiente, de modo que todo o líquido existente mais o reposto foi consumido. Logo ela consumiu de água, tudo que ela repôs de água, ou seja, 1+2+3+...+15 = 15*16/2 = 120 copos de água. Daí, de líquido, ela consumiu 1+2+3+...+16 = 136 copos no total.

**Problema 7.**

Encontre todos os pares de números primos cuja soma seja 999.

**Solução:**

Da aritmética temos que, para que a soma de dois números naturais seja um número impar, então um dos números deve ser par e o outro número deve ser impar (P+P=P, P+I=I, I+I=P). Então se a e b são naturais e a + b = 999, então a é par e b é impar ou vice versa. Então, se a soma de dois números primos deve ser 999, então necessariamente um dos números deve ser 2, pois 2 é o único número par que é primo. Logo, o único par possível deve ser (2,997). Basta checar se 997 é primo.
Para checar se um número natural n é primo, basta verificar se n é divisível por algum número primo menor ou igual a $\sqrt{n}$. Se n não for divisível por nenhum número primo nessas condições, então n é primo.

Daí, temos que, como $\sqrt{997} = 32,..$, devemos checar a divisibilidade de 997 pelo os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31. É fácil ver que 997 não é divisível por qualquer um desses primos, logo 997 é primo.
O único par que satisfaz as condições do problema é (2,997).

**Problema 8.**
Um palíndromo é um número que tem a mesma leitura tanto da esquerda para direita como da direita para esquerda, tais como 747 ou 1991.

Quantos palíndromos existem entre 1 e 1000 inclusive?
**Solução:**

Para resolver esses problemas vamos verificar os casos com até 3 algarismos ( números menores que 1000):
i) Caso 1: 1 algarismo. Os números 1,2,...,9 são palíndromos pois sua leitura da direita para esquerda é a mesma da esquerda para direita. Total: 9.
ii) Caso 2: 2 algarismos. Para que um número de 2 algarismos seja um palíndromo, então os dois algarismos devem ser iguais. Logo, como o primeiro algarismo é diferente de zero, temos os números 11, 22, … 99. Total: 9.
iii) Caso 3: 3 algarismos. Nesse caso temos que o primeiro algarismo deve ser igual ao terceiro, pois, pela definição de número palíndromo, a leitura da direita para esquerda deve ser igual à leitura da esquerda para direita. Como o primeiro algarismo deve ser diferente de 0, então temos 9 possibilidades para o primeiro (o terceiro já está amarrado) vezes 10 possibilidades para o segundo algarismo (0,1,...,9). Total: 9*10 = 90 possibilidades

Daí, o total de palíndromos maiores ou igual a 1 e menores ou igual a 1000 inclusive é 9 + 9 + 90 =108.

**Problema 9.**
Suponha que você tenha um trabalho onde você recebeu um aumento de 10%. Como houve uma crise no mercado, o chefe foi obrigado a dar-lhe um corte de 10 % no salário.

Depois desse corte no seu salário, você vai voltar a receber o seu salário inicial?
**Solução:**

Suponha que seu salário seja 100. Então, se você recebe um aumento de 10%, seu salário fica 100 + 100 x 10/100 = 110. Agora, considere que você receba um corte de 10%, seu novo salário será:
110 -110 x 10/100 = 110-11= 99.
Daí, depois do corte temos um salário de 99 menor que os 100 originais. Portanto, a resposta é Não!

**Problema 10.**
Você é convidado a disputar um jogo. As regras são simples. Existem 100 cartas, viradas para baixo. Cinquenta e cinco das cartas são marcadas com a palavra "ganha" e 45 das cartas com a palavra "perde." Você começa com a quantia de R$ 10.000,00, deve apostar metade de seu dinheiro em cada carta que você escolhe para desvirar, e você ganha ou perde esse montante com base no que a carta marcar. No final do jogo, todas as cartas foram desviradas.
Com qual quantia você termina o jogo?
**Solução:**

Para resolver esse problema devemos observar a seguinte propriedade. Seja $P_i$ o valor de dinheiro que eu possuo após i passos, com $0 \leq i \leq 100$. Temos que, inicialmente o valor é R$10.000,00, então $P_0 = 10000$. Suponha que já viramos n cartas, com n < 100. Nesse momento, o valor do dinheiro que eu tenho é $P_n$. Então, temos duas possibilidades ao virar a n+1-ésima carta. Ou perder ou ganhar. Se a carta virada tiver escrito ganha, então eu ganho o valor $\frac{P_n}{2}$, daí $P_{(n+1)} = P_n + \frac{P_n}{2} = \frac{3 \times P_n}{2}$. Se a carta virada tiver escrito perde então eu perco o valor $\frac{P_n}{2}$, daí $P_{(n+1)} = P_n - \frac{P_n}{2} = \frac{P_n}{2}$. Ou seja, o valor que eu tenho no passo n+1 em função do valor no passo n, segue a seguinte regra para $0 \leq n < 100$:

$$P_{(n+1)} = \begin{cases} \frac{3 \times P_n}{2}, se\ \ ganha \\ \frac{P_n}{2}, se\ \ perde \end{cases}$$
.

Observe que a cada passo ora eu multiplico o valor anterior por 3/2 (se ganha) ora o valor anterior por ½ (se perde).
Então, partindo de $P_0$, depois de virar 100 cartas, vamos ter multiplicado por 3/2 55 vezes (55 cartas ganham) e multiplicado por ½ 45 vezes (45 cartas perdem).
Logo, $P_{100} = P_0 \times (\frac{3}{2})^{55} \times (\frac{1}{2})^{45} = \frac{10.000 \times 3^{55}}{2^{100}}$. O jogo termina com esse valor de $P_{100} = \frac{10.000 \times 3^{55}}{2^{100}} \cong$ R$ 1,38.
Ou seja, se você começa o jogo com 10 mil reais, seguindo as regras do jogo, você termina com aproximadamente 1 real e 38 centavos!

**Problema 11.**
Você está sentado em volta de uma mesa em um quarto escuro. Sobre a mesa há 12 moedas de 1 real, das quais 5 são caras e 7 são coroas. Você sabe onde as moedas estão, portanto, você pode mover ou desvirar qualquer moeda, mas como o quarto está escuro, você não vai saber se a moeda que você está tocando é originalmente cara ou coroa. Você deve separar as moedas em dois montes para que quando as luzes se acenderem haja um número igual de caras nos dois montes.

Você vai conseguir separar as moedas de modo que haja num número igual de caras nos dois montes?
**Solução:**

A resposta é sim.
Mesmo no escuro, você pode separar as moedas em dois grupos: um com 5 moedas e o outro com 7 moedas. Como o quarto está escuro, você não pode saber quais as moedas que mostram as faces “cara”, nem as moedas que mostram as faces “coroa”.
Observe que, se no grupo com maior quantidade de moedas (com 7 moedas) tiver C moedas com as faces “cara”, então no grupo menor, com 5 moedas, tem 5 – C moedas com a face “cara” pois, do total de moedas sobre a mesa, existem exatamente 5 com a face “cara”.
Agora, você desvira as moedas do grupo menor. Quando você faz isso, o número de moedas com face “cara” passa a ser 5 – (5 – C) = C.
Portanto, em cada um dos dois grupos existirão C moedas com a face “cara”.