19ª Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte - 2008
Segunda Etapa – Em 27/09/2008
Prova do Nível I (6º ou 7º Séries) – (antigas 5ª ou 6ª séries)

1ª Questão:
Substitua as nove letras da figura abaixo pelos números inteiros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de maneira que nenhum número apareça mais de uma vez e de tal modo que a soma dos números nos vértices dos triângulos eqüiláteros ABC, DFG, EHI, ADE, BFH, CGI, AFI seja a mesma.

A
B C
D E
F G H I

Apresente todas as soluções possíveis.
Solução

Os triângulos ABC, DFG, EHI juntos contém cada um dos nove números dados, uma vez cada deles. Mas, 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 e a soma dos números em cada um dos vértices dos triângulos é a mesma. Logo, esta soma é 45 / 3 = 15. Agora, existem oito maneiras de partir o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} em subconjuntos com três elementos de modo que a soma de seus elementos seja 15:

{9, 5, 1}, {9, 4, 2}, {8, 6, 1}, {8, 5, 2}, {8, 4, 3}, {7, 6, 2}, {7, 5, 3}, {6, 5, 4}

Observe que, na disposição dada, tem vértices que aparece em três dos triângulos (A, F, I) e os outros vértices aparecem somente duas vezes como vértices. Assim, 8 e 2 são candidatos para ocupar o lugar destes vértices. A menos de rotações e reflexões do triângulo, são as seguintes as possibilidades:

8
1 6
3 4
5 7 9 2

8
3 4
1 6
5 9 7 2

6
1 8
7 2
5 3 9 4

6
7 2
1 8
5 9 3 4

2ª Questão

Um pai tem 14 presentes, distribuídos em envelopes lacrados contendo 1, 2, 3, ... 14 chocolates, respectivamente, que ele pretende distribuir entre suas filhas Alice, Beatriz e Camila, de modo que cada uma das filhas receba a mesma quantidade de chocolates.

Como o pai pode fazer esta distribuição? Dê mais de uma possibilidade.

E se em vez de 14 fossem 13 envelopes contendo 1, 2, 3, ...13 chocolates, respectivamente?

Solução

Observe que $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 14 = 105$ e $105 = 3 \times 35$. Portanto, cada uma das filhas deve receber 35 chocolates. Existem várias maneiras de fazer a distribuição. Duas distribuições possíveis são:

Alice	Beatriz	Camila
(1, 2, 3, 5, 7, 8, 9)	(4,6,11, 14)	(10, 12, 13)
(1, 5, 6, 11, 12)	((2, 3, 7, 10, 13)	(4, 8, 9, 14)

Se em vez de 14 fossem 13 envelopes, teríamos $1 + 2 + 3 + ... + 13 = 91$, que não é divisível por 3. Portanto, é impossível fazer a distribuição nos termos pedidos.

3ª Questão:

Coloque ou 1 ou – 1 em cada um dos quadrados unitários de um tabuleiro 11×7. Em seguida, calcule o produto de todos os números em cada uma das 11 linhas e cada uma das 7 colunas.

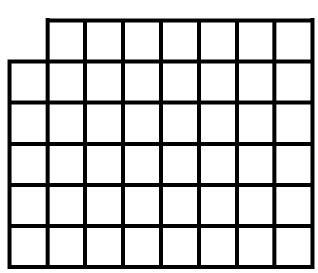
Diga, justificando, se é possível arrumar os números no tabuleiro de modo que a soma dos 18 produtos seja zero.

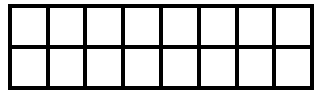
Solução

Para que a soma dos 18 produtos seja zero, nove deles tem de ser 1 e nove deles tem de ser -1. Deste modo, o produto, P, dos 18 números é igual a -1. Por outro lado, P é também o produto de 11 linhas e 7 colunas. Logo, P é 1, pois é quadrado do produto de cada um dos números do tabuleiro. Logo, há uma contradição, o que implica que é impossível fazer o arranjo pedido.

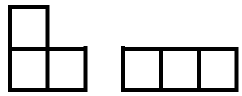
4ª Questão :

Apague um quadrado unitário num dos cantos de um tabuleiro 8×8., veja figura a seguir.





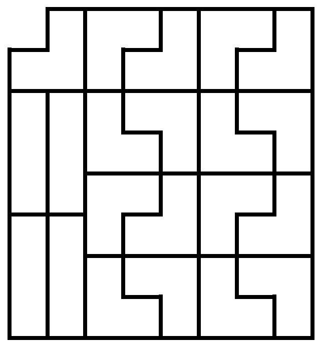
Diga, justificando, se podemos preencher o tabuleiro mutilado usando peças dos seguintes modelos



usando no mínimo uma peça de cada tipo.

Solução

Sim podemos preencher. O diagrama abaixo mostra como fazer.



19ª Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte - 2008
Segunda Etapa – Em 27/09/2008
Prova do Nível II (8ª ou 9ª Séries) – (antigas 7ª ou 8ª Séries)

1ª Questão:

Um garoto conseguiu juntar um total de R$ 5.900,00 (cinco mil e novecentos reais), usando somente cédulas de 10, 20, 50 e 100 reais. Ele contou as cédulas de 10 e 20 reais e verificou ter juntado, ao todo, 50 cédulas. O garoto observou que, entre as cédulas de 50 e 100 reais, juntou ao todo, 100 cédulas.

Quantas cédulas de cada tipo o garoto possui? Dar todas as possibilidades.

Solução

Sejam d, v, f, c a quantidade de cédulas de 10, 20, 50 e 100 reais, respectivamente.
Assim, temos que:

$$d + v = 50 \qquad (*)$$
$$f + c = 100 \qquad (**)$$
$$10d + 20v + 50f + 100c = 5900 \qquad (***)$$

Dividindo por 10 os dois membros da equação (***), temos

$$d + 2v + 5f + 10c = 590, \text{ ou ainda}$$

$$(d + v) + v + 5(f + c) + 5c = 590 \quad (****)$$

Substituindo os valores de (*) e (**) em (****), temos:

$$50 + v + 500 + 5c = 590, \text{ ou ainda}$$
$$v + 5c = 590 – 550 = 40.$$

Assim, temos que o maior valor possível de c é 7, admitindo que o garoto tem pelo menos uma cédula de cada tipo. Ou seja, $1 \leq c \leq 7$. Podemos fazer uma tabela com os possíveis valores de d, v, f, c:

c	v	d	F
7	5	45	93
6	10	40	94
5	15	35	95
4	20	30	96
3	25	15	97
2	30	10	98
1	35	5	99

2ª Questão:
Preencha os quadrados unitários de um tabuleiro 4 x 4 com os números -1, 0, 1, usando um número em cada quadrado, de modo que os oito números correspondentes as somas dos números nas linhas e nas colunas sejam distintos.
Solução

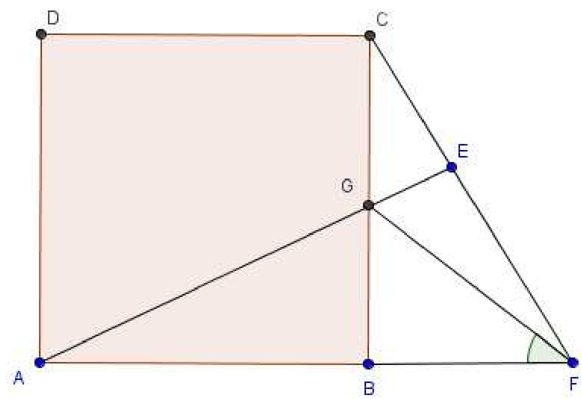
1	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**-1**
1	**0**	**-1**	**-1**
0	**-1**	**-1**	**-1**

3ª Questão:
Coloque ou 1 ou – 1 em cada um dos quadrados unitários de um tabuleiro 11 x 7. Em seguida, calcule o produto de todos os números em cada uma das 11 linhas e cada uma das 7 colunas.

Diga, justificando, se é possível arrumar os números no tabuleiro de modo que a soma dos 18 produtos seja zero.
Solução

Para que a soma dos 18 produtos seja zero, nove deles tem de ser 1 e nove deles tem de ser -1. Deste modo, o produto, P, dos 18 números é igual a -1. Por outro lado, P é também o produto de 11 linhas e 7 colunas. Logo, P é 1, pois é quadrado do produto de cada um dos números do tabuleiro. Logo, há uma contradição, o que implica que é impossível fazer o arranjo pedido.

4ª Questão:
Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e o segmento AE é perpendicular ao segmento CF.



Determine a medida do ângulo $B\hat{F}G$

Solução:

Trace a diagonal AC e observe que:

(i) a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é 45°;

(ii) os segmentos BC e AE são alturas do triângulo ACF;

(iii) o ponto G é ortocentro do triângulo ACF e que assim o prolongamento de FG intersecta AC perpendicularmente.

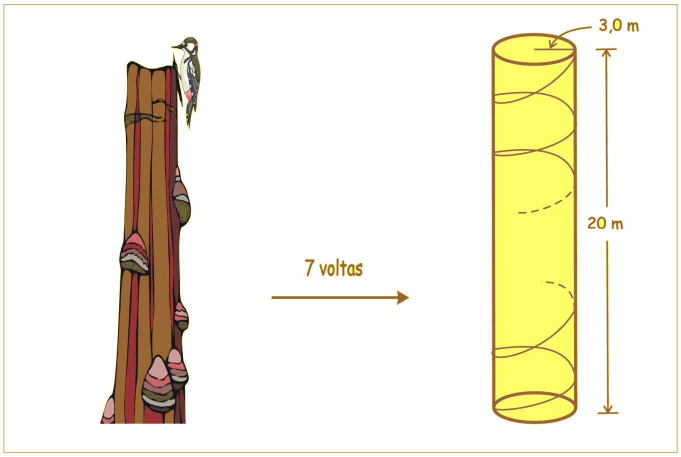
Portanto, a medida do ângulo $B\hat{F}G$ é 45°.

4ª Questão:

19ª Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte - 2008
Segunda Etapa – Em 27/09/2008
Prova do Nível III (Ensino Médio)

1ª Questão:

Um pica-pau marca a bicadas seu caminho quando ele desce ao longo do tronco cilíndrico de uma árvore, começando 20 metros acima do nível do solo. O pássaro segue uma trajetória em espiral (hélice cilíndrica) e dá a volta sete vezes ao longo da árvore até o chão. O tronco cilíndrico tem raio de 3 metros.



Determine a distância total percorrida pelo pica-pau.

Solução

Imagine a árvore como um cilindro reto e a espiral descrita pelo pica-pau como uma linha desenhada sobre a superfície do cilindro. Se você planificasse a superfície lateral desse cilindro a espiral, quando planificada, seria justamente uma das diagonais de um retângulo de lados 20m e 7x3x2π m=42πm.

Usando o Teorema de Pitágoras, podemos calcular o comprimento total percorrido pelo pica-pau: $\sqrt{20^2+(42\pi)^2} \cong \sqrt{(20)^2+(131{,}88)^2} = \sqrt{400+17392{,}33} \cong 134{,}88$ m.

2ª Questão:

Seja P um conjunto do plano contendo 2008 pontos distintos, de tal modo que quaisquer 4 destes pontos distintos pertencem a um círculo do plano.
Mostre que todos os 2008 pontos pertencem ao mesmo círculo.

Solução

Seja T={x_1,x_2,x_3,x_4} um subconjunto de P com quatro pontos distintos. De acordo com o enunciado do problema, existe um círculo λ que "passa" por estes quatro pontos. Suponha, por absurdo que existe um $x \in P$ tal que $x \notin \lambda$. Pela hipótese, deve existir um círculo γ que "passa" pelos pontos x,x_2,x_3,x_4. Ora, sabemos que três pontos não colineares determinam um único círculo (aquele que é circunscrito ao triângulo cujos vértices são os três pontos dados!). Assim, λ e γ "passam" pelos pontos x_2,x_3,x_4, logo coincidem e portanto $x \in \lambda$, o que é uma contradição!.

Portanto, todos os 2008 pontos pertencem a um mesmo círculo.

3ª Questão:
Colocam-se, aleatoriamente, quatro bolas pretas e cinco bolas brancas em torno de um círculo. A operação seguinte é permitida. Se duas bolas consecutivas são de mesma cor, se insere uma nova bola preta entre elas. Caso contrario, se insere uma nova bola branca. Retiram-se as bolas pretas e as brancas antes da inserção.
Repetindo a operação um número finito de vezes, é possível obter nove bolas brancas?
Solução

Associando a cada bola preta o valor 1 e a cada bola branca o valor –1, se observa que duas bolas consecutivas se substituem pelo produto de seus números. Considerando o producto P dos nove valores antes e depois de cada operação, vemos que o novo P é igual ao quadrado do anterior P. Assim, sempre será $P=1$ depois de cada operação. Como as nove bolas brancas dariam $P=-1$, não é possível obter uma tal configuração.

4ª Questão:
Marcam-se vinte e sete pontos sobre um círculo, de modo que eles sejam os vértices de um polígono regular de 27 lados. Alguns destes pontos são pintados de verde e os outros de amarelo, mas a pintura é feita de modo que entre dois pontos verdes existem no mínimo dois pontos amarelos.

Nestas condições, podemos garantir que existem três destes pontos amarelos que são vértices de um triângulo eqüilátero?
Solução

Sim.
Numere os pontos, no sentido horário, de 1 até 27. Fazemos uma partição do conjunto dos 27 pontos em nove subconjuntos de três elementos cada:

{1, 10, 19}, {2, 11, 20}, {3, 12, 21}, {4, 13, 22}, {5, 14, 23}, {6, 15, 24}, {7, 16, 25},
{8, 17, 26}, {9, 18, 27}.

Cada um destes subconjuntos define os vértices de um triângulo eqüilátero. Suponha que nenhum deles tenha todos seus elementos pintados de amarelo. Neste caso, cada subconjunto contém no mínimo um elemento pintado de verde, o que implica que tem de existir no mínimo nove vértices verdes. Mas, entre dois pontos verdes existe no mínimo dois pintados de amarelos. Isto significa que existem no mínimo $9 \times 2 = 18$ vértices amarelos. Por outro lado, existem exatamente 27 vértices. Vamos imaginar que a pintura foi feita de modo que o ponto 1 é verde. Então 2, 11 e 20 são amarelos, pois, caso contrário não teríamos 18 vértices amarelos.