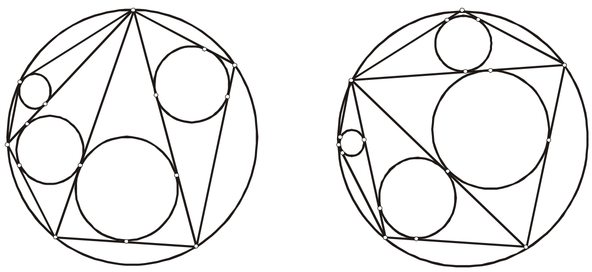
# *Uma soma incrivelmente invariante*

*Carlos A.Gomes*
*Natal/RN, UFRN*

Um resultado altamente inesperado é encontrado no maravilhoso texto “Advanced Euclidean Geometry” de Roger Johnson’s publicado pela Dover publications em 1960. É um antigo teorema japonês que pelo seu surpreendente conteúdo merece ser “ressuscitado” agora na língua portuguesa para que ele seja conhecido e apreciado com muito louvor pelos amantes da harmonia da matemática e em especial pelos geômetras.

***Seja um polígono convexo, que possa ser inscrito numa circunferência. Se triangularizarmos esse polígono a partir de um de seus vértices (traçando diagonais, é claro!) e inscrevermos em cada um destes triângulos uma circunferência a soma das medidas dos raios dessas circunferências permanece constante independente da triangularização realizada com o polígono.***

Veja um exemplo ilustrativo com um hexágono:



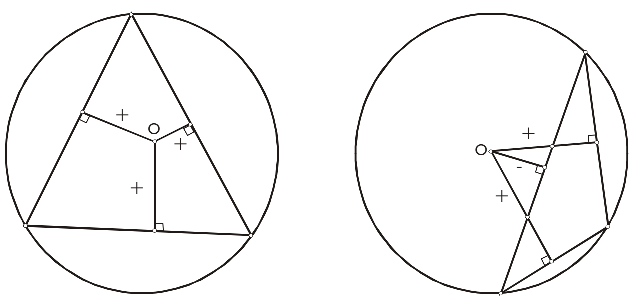
Nas duas figuras acima a soma das medidas dos raios das circunferências inscritas nos triângulos é a mesma.(apesar das medidas dos raios serem diferentes)

Para verificarmos o que foi dito acima usaremos o

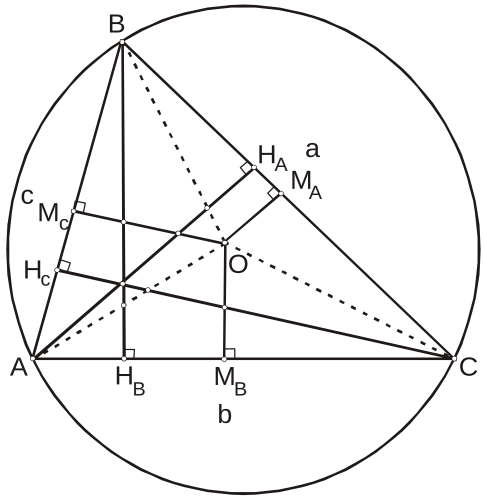
***TEOREMA DE CARNOT: Num triângulo ABC a soma (algébrica) das distâncias do circuncentro do triângulo ABC aos lados AB, AC e BC desse triângulo é igual a R+r, onde R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e r a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC***.

* A convenção de sinais será:
\+ $\rightarrow$ Quando pelo menos uma parte do segmento está no interior do triângulo.
**-** $\rightarrow$ Quando o segmento está completamente fora do triângulo.

Observe as figuras:



Vamos considerar aqui o caso do triângulo acutângulo. Os outros dois casos podem ser verificados de modo razoavelmente semelhantes.




Na figura acima , temos que:

2 . (ABC) = (a + b + c). r , ( ) = Área

2 (ABC) = $a\overline{OM_A} + b\overline{OM_B} + c\overline{OM_C}$ e daí

r (a + b + c) = $a\overline{OM_A} + b\overline{OM_B} + c\overline{OM_C}$ (0)

Agora perceba que:

$\angle AOB = 2\angle C$; $\angle BOC = 2\angle A$; $\angle AOC = 2\angle B$ (Pelo teorema do ângulo inscrito). Assim podemos observar as seguintes semelhanças:

$$\Delta ABH_B \sim \Delta ACH_C \sim \Delta BOM_A \rightarrow \frac{\overline{AB_B}}{c} = \frac{\overline{AH_C}}{b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \quad (1)$$

$$\Delta BAH_A \sim \Delta BCH_C \sim \Delta COM_B \rightarrow \frac{\overline{BH_A}}{c} = \frac{\overline{BH_C}}{a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \quad (2)$$

$$\Delta CBH_B \sim \Delta CAH_A \sim \Delta AOM_C \rightarrow \frac{\overline{CH_B}}{a} = \frac{\overline{CH_A}}{b} = \frac{\overline{OM_C}}{R} \quad (3)$$

e daí de (1), (2) e (3) temos que

$$\frac{\overline{AB_B}}{c} = \frac{\overline{AH_C}}{b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \rightarrow \frac{\overline{AH_b} + \overline{AH_c}}{c+b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \rightarrow R\left(\overline{AH_b} + \overline{AH_c}\right) = (b+c).\overline{OM_A} \quad (4)$$

$$\frac{\overline{BH_A}}{c} = \frac{\overline{BH_C}}{a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \rightarrow \frac{\overline{BH_A} + \overline{BH_c}}{c+a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \rightarrow R\left(\overline{BH_a} + \overline{BH_c}\right) = (c+a).\overline{OM_B} \quad (5)$$

$$\frac{\overline{CH_B}}{a} = \frac{\overline{CH_a}}{b} = \frac{\overline{OM_C}}{R} \rightarrow \frac{\overline{CH_B} + \overline{CH_a}}{a+b} = \frac{\overline{OM_c}}{R} \rightarrow R\left(\overline{CH_B} + \overline{CH_a}\right) = (a+b).\overline{OM_C} \quad (6)$$

Adicionando (4), (5) e (6) temos:

$$\overline{OM}_a(b+c)+\overline{OM}_b(a+c)+\overline{OM}_c(a+b)=R(a+b+c) \quad (7)$$

finalmente fazendo (7) + (0) temos:

$$\overline{OM}_a(b+c)+\overline{OM}_b(a+c)+\overline{OM}_c(a+b)=R(a+b+c)$$

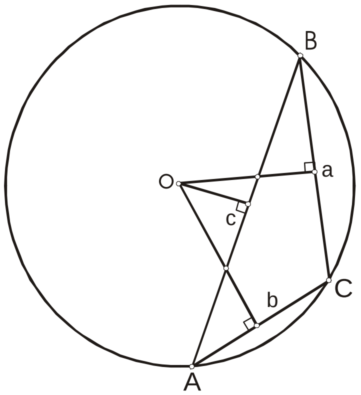
$$+$$

$$\underline{a.OM_a+b.OM_b+c.\overline{OM}_c=r\,(a+b+c)}$$

$$\left(\overline{OM}_a+\overline{OM}_b+\overline{OM}_c\right)(a+b+c)=(R+r)(a+b+c)$$

e finalmente, $\overline{OM}_a+\overline{OM}_b+\overline{OM}_c=R+r$ .

Obs. Na convenção estabelecida para os sinais da medida algébrica dos segmentos o sinal (-) é justificável para garantir a igualdade que relaciona as medidas das áreas conforme ilustramos abaixo:



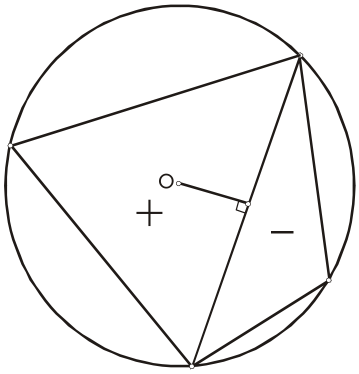

(ABC) = (OAC) + (OCB) – (OAB) e daí,

r (a + b + c) = $a\overline{OM}_a+b\overline{OM}_b-c\,\overline{OM}_c$

Bem, de posse do teorema de Carnot vamos agora provar a nossa jóia rara! Vejamos: Primeiro perceba que qualquer triangularização de n–ágono com diagonais desse polígono gera n–2 triângulos. Vamos assumir que os triângulos são numerados de 1 a (n – 2). Seja $n_i$ a medida do raio da circunferência inscrita no i–ésimo triângulo e para cada triângulo seja $OO_i=a_i\overline{O_iM}_{ai}+b_i\overline{O_iM}_{bi}+c_i\overline{O_iM}_{ci}$ e daí pelo teorema de Carnot temos que $r_i+R=\overline{OM}_{ci}$. Calculando a soma desse resultado aplicado a cada triângulo temos:

$$r_1+r_2+...+r_{n-2}=\overline{OO}_1+\overline{OO}_2+...+\overline{OO}_{n-2}-(n-2).R$$

Perceba que a soma $\overline{OO}_1+\overline{OO}_2+...+\overline{OO}_n$ consiste na soma algébrica das perpendiculares traçadas aos lados do n–ágono são contadas apenas uma vez (e com sinal positivo) já as perpendiculares às diagonais são contadas duas vezes (uma com sinal positivo e outra com sinal negativo) conforme ilustra a figura abaixo:




Assim a soma $\overline{OO}_1 + \overline{OO}_2 + ... + \overline{OO}_{n-2}$ corresponde a soma das distâncias de O aos lados do polígono (que é constante)e daí concluímos que $r_1 + r_2 + ... + r_{n-2}$ é constante pois $r_1 + r_2 + ... + r_{n-2} = \overline{OO}_1 + \overline{OO}_{2+...+}\overline{OO}_{n-2} + (n-2).R$ = constante.

□

Referências:

[1] Mathematical gems III , Ross Honsberger, MAA
[2] www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml