Olimpíada Brasileira de Matemática		Sociedade Brasileira de Matemática		PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

COLETÂNEA DE PROBLEMAS Nº 01 - 2007

Problema 1

Dado um conjunto **X**, dizemos que dois subconjuntos de **X**, S e T, constituem uma *partição* de **X** se **X** = S ∪ T, com S ∩ T = ∅.
Os subconjuntos S = {1, 4} e T = { 2, 3} constituem uma partição de **X** = {1, 2, 3, 4} e ainda satisfazem duas propriedades:

i. S e T têm a mesma quantidade de elementos;
ii. a soma dos elementos de S é igual a soma dos elementos de T.

(a) Diga, justificando, qual é o próximo número natural *n*, maior do que 4, para o qual o conjunto **X** = {1, 2, 3, ...,*n*} tem uma partição, S e T, satisfazendo as propriedade i. e ii., acima descritas.
(b) Resolva o item (a) com a propriedade adicional:
iii. a soma dos quadrados dos elementos de S é igual a soma dos quadrados dos elementos de T.
(c) Nathália diz que pode fazer uma partição do conjunto **X** = {1, 2, 3, ..., 16} em dois subconjuntos, S e T, com as propriedades i., ii. e iii., acima descritas, e com a propriedade adicional:
iv. a soma dos cubos dos elementos de S é igual a soma dos cubos dos elementos de T.
Mostre que Nathália está certa.
(d) Marina diz que pode fazer uma partição do conjunto **X** = {1, 2, 3, ...8}, de modo que satisfaça as propriedades i., ii., iii. e iv.
Explique porque você não concorda com Marina.

Problema 2

Defina uma nova operação, $*$, entre dois quaisquer inteiros positivos, satisfazendo as três propriedades seguintes:

(i) $x * x = x + 2$ (ii) $x * y = y * x$ (iii) $\dfrac{x*(x+y)}{x*y} = \dfrac{x}{y}$

Encontre o valor de: $11 * 8$.

Problema 3

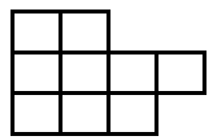
	10	

No quadrado unitário central de um tabuleiro 3 x 3, veja figura acima, escreve-se o número 10. Os quadrados unitários restantes devem ser preenchidos com 8 dos dígitos de 1 a 9, usando cada um uma única vez e de modo que a soma em qualquer linha e em qualquer coluna do tabuleiro (mas não necessariamente nas diagonais) seja igual a 16.

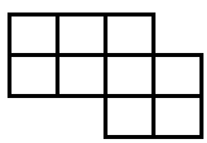
(a) Complete o preenchimento.

(b) Preencha, com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, os quadrados unitários do tabuleiro abaixo, de modo que a **média aritmética** dos números em cada linha e coluna do tabuleiro (mas não necessariamente nas diagonais) seja a mesma. Cada dígito só pode ser utilizado uma única vez.

(c) Preencha, com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, os quadrados unitários da figura abaixo, de modo que a **média aritmética** dos números em cada linha e coluna seja a mesma. Cada dígito só pode ser utilizado uma única vez.



(d) Explique porque os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, não podem ser colocados nos quadrados unitários da figura abaixo, de modo que a **média aritmética** dos números em cada linha e coluna seja a mesma. Cada dígito só pode ser utilizado uma única vez.



Problema 4

Sabe-se que numa equipe de futebol, há um atacante que sempre mente, um zagueiro que sempre fala a verdade e um meio-campista que às vezes fala a verdade e às vezes mente. Na saída do estádio, dirigindo-se a um torcedor que não sabia o resultado do jogo que terminara, um deles declarou "O jogo foi empate" o segundo disse "Não foi empate" e o terceiro falou "Nós perdemos". O torcedor reconheceu somente o meio-campista, mas pode deduzir o resultado do jogo com certeza.

Afinal, qual a declaração do meio-campista e qual foi o resultado do jogo?

Problema 5

Numa cidade, existem três tipos de táxi, para o transporte de passageiros do aeroporto para um hotel: os que transportam 6, 10 ou 15 passageiros, respectivamente. Com a chegada

de 120 passageiros para um congresso de Matemática, disponibilizou-se seis tipos de táxi de cada tipo para transportá-los até o hotel.
De quantas maneiras diferentes é possível usar os táxis , de modo que nenhum táxi usado tenha qualquer lugar vazio?

Problema 6
Numa ilha, a convivência entre os camaleões das cores verde e marrom têm regras fixas. Se eles estão numa fila, lado a lado com outro, cada um deles observa a cor dos camaleões ao lado uma vez a cada minuto. No final de cada minuto, cada camaleão porta-se de acordo com as quatro regras seguintes:

- se ele está entre dois camaleões verdes, muda sua cor (*se é verde, fica marrom; se é marrom, fica verde*) e fica parado;
- se ele tem um camaleão verde de um lado e um marrom do outro, permanece com a mesma cor e fica parado;
- se ele está entre dois camaleões marrons, sai da fila e desaparece;
- se ele está no fim da fila; permanece com a mesma cor e fica parado.

(a) Dez camaleões estão lado a lado em fila, sendo os cincos primeiros verdes e os outros marrons.
O que irá acontecer com a fila e qual seu comprimento depois de vários minutos?
(b) É possível arranjar dez camaleões numa fila, de modo que o dez esteja ainda na fila dez minutos depois?
(c) Seis camaleões formam um círculo *(nestas condições, não existirá um camaleão no fim da fila!)*.
É possível arranjá-los de modo que existam sempre seis camaleões? Se é possível, mostre como fazer o arranjo; se não, explique porque não pode arranjá-los.
(d) Doze camaleões formam um círculo.
Encontre um arranjo deles de tal modo que, a todo minuto no mínimo um deles muda de cor, mas permanecem os doze camaleões.

Problema 7
Um digitador inicia sua tarefa exatamente ao meio-dia, um trabalho que leva 9 horas para concluir. Exatamente às 13 horas, um outro digitador junta-se a ele e os dois concluem a tarefa às 15 horas.
Em quantas horas o segundo digitador faria o trabalho sozinho?

Problema 8
Tem-se três cartões e em cada um deles escreve-se um inteiro escolhido dentre os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, de modo que os cartões ficam numerados por $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, respectivamente. Os três cartões são embaralhados e distribuídos, um para cada um dos três jogadores, que anota o número do cartão recebido por ele. Em seguida, os cartões são recolhidos, embaralhados e distribuídos novamente, um para cada jogador, que anota o número do cartão por ele recebido. O processo é repetido mais uma vez. No passo seguinte, cada jogador calcula a soma de seus três números. Os três totais foram: 13, 15 e 23.
Qual é o valor do produto **abc**?

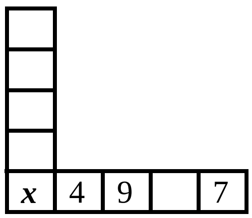
Problema 9

Uma doença pode ser de dois tipos: tipo A, ou a menos comum do tipo B. Um indivíduo pode ter somente um dos dois tipo da doença. Numa certa população, 1 dentre 320 indivíduos sofre da doença. Suponha que 1 dentre ***x*** da população sofre do tipo A da doença e 1 dentre ***y*** da população sofre do tipo B, onde ***x*** e ***y*** são inteiros positivos. Qual é o menor valor possível para **y**?

Problema 10

Os dígitos de 1 a 9 inclusive devem ser colocados na figura abaixo, um por cada quadrado unitário, de modo que o total da soma dos cinco números na horizontal seja igual a soma dos cinco números na vertical.

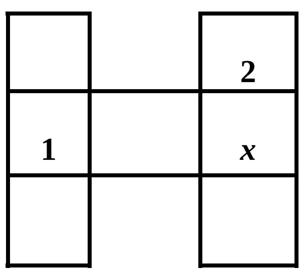
Dado que os dígitos 4, 7 e 9 estão nas posições mostradas, quantos são os possíveis valores para ***x***?



Problema 11

Os dígitos de 1 a 7 inclusive devem ser colocados na figura abaixo, um por cada quadrado unitário, de modo que o total da soma dos números em cada uma das três linhas horizontais seja igual a soma dos números em cada coluna.

Dado que os dígitos 1 e 2 estão nas posições mostradas, quantos são os possíveis valores para ***x***?



Problema 12

O retângulo ABCD tem $\overline{AB} = 10$ e $\overline{BC} = 8$. Seja L o ponto sobre a AB tal que $\overline{AL} = 1$. Sejam M, N e O pontos sobre BC, CD e AD, respectivamente, tais que LMNO é um retângulo.

(a) Mostre que existem duas posições possíveis para M.

(b) Seja R_1 a área do menor retângulo interno e R_2 a área do maior retângulo interno.

i. Mostre que $R_1 + R_2$ = área do retângulo ABCD.

ii. Ache a razão $\dfrac{R_1}{R_2}$.

(c) Suponha que o comprimento $\overline{AL} = x$.

Mostre que existem valores de x para os quais existe somente um uma posição para M. Qual é a esta posição e, para estes valores de x, qual é a área do retângulo LMNO?

Problema 13

Considere um círculo inscrito num quadrilátero ABCD. Os lados BC e DA possuem os mesmos comprimentos, os lados AB e CD são paralelos e têm comprimentos a e b, respectivamente.

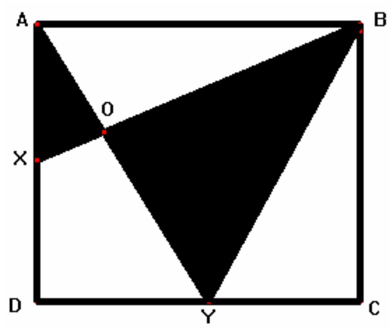
(a) Prove que este quadrilátero está inscrito em algum círculo.

(b) Ache o comprimento do diâmetro do círculo inscrito no quadrilátero ABCD.

(c) Prove que o quadrado da área do quadrilátero é igual ao produto dos comprimentos de seus lados.

Problema 14

O lado do quadrado ABCD tem comprimento 10 cm. Os pontos X e Y são os pontos médios dos lados AD e CD, respectivamente, veja figura abaixo.



Qual é o valor da área hachurada?

Problema 15

Seja f(n) o 1nteiro mais próximo de $\sqrt{n}$.

Determine o valor da expressão $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+....+\frac{1}{f(10000)}$

Problema 16

A expressão $\frac{7n+18}{2n+3}$ assume valores inteiros para certos valores inteiros de n.

Calcule a soma de todos os valores inteiros da expressão dada.

Problema 17

Coloca-se em fila cento e vinte moedas de 5 centavos. Em seguida, substitui-se cada moeda colocada numa posição par por uma de 10 centavos. A seguir, substitui-se cada moeda colocada numa posição múltiplo de três por uma moeda de 20 centavos. Depois, substitui-se cada moeda colocada numa posição múltiplo de quatro por uma moeda de 50 centavos. Finalmente, substitui-se cada moeda colocada numa posição múltiplo de cinco por uma de 1 real.

Depois da última intervenção, qual é o valor total, em reais, da fila com as 120 moedas?

Problema 18
Considere um tabuleiro 4 x 4. Se você distribuir os inteiros de 1 a 16, um por cada quadrado unitário do tabuleiro, de modo que os totais de cada uma das quatro colunas, de cada uma das quatro linhas e os totais das duas diagonais forem, em alguma ordem, dez inteiros consecutivos, estará formado o que se chama um *quadrado antimágico.* O diagrama abaixo mostra um quadrado antimágico 4 x 4 incompleto.
Quando se completa o quadrado antimágico, qual é o número que substitui o símbolo *?

		*	14
	9	3	7
	12	13	5
10	11	6	4

Problema 19
Quando o Sr. Silva empacota seus livros em caixas com 12 livros cada, sobram 2 livros. Quando empacota em caixas com 9 livros cada, sobram 2. Finalmente, quando o Sr. Silva empacota seus livros em caixas com 7 livros cada, não sobra qualquer livro.
Qual é o menor número de livros que teria o Sr. Silva?

Problema 20
Um recipiente contém 27 galões de água e 9 galões de ácido acético. Quantos galões de água têm de ser evaporado, se a solução resultante tem de ter 40 % de ácido acético?

Problema 21
Mostre que, no plano cartesiano, não existe triângulo equilátero ABC cujos vértices tenham todas as coordenadas inteiras.