Olimpíada Brasileira de Matemática		Sociedade Brasileira de Matemática		PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

COLETÂNEA DE PROBLEMAS N$^{\underline{o}}$ 02 - 2007

Problema 1
Encontre todos os números naturais divisíveis por 30 e que possuem exatamente 30 divisores.

Problema 2
Tem-se n bolas e pinta-se cada uma delas com uma das duas cores: vermelha ou azul, de modo que existe pelo menos uma bola de cada uma das cores dadas. Arranja-se as bolas em linha reta. Sabe-se que quaisquer duas destas bolas, que tenham 10 ou 15 bolas entre elas, são de mesma cor.
Qual é o maior valor possível para n?

Problema 3
No início do mês, uma loja tem 10 produtos distintos para vender, todos eles com o mesmo preço. Todo dia o preço de cada um destes produtos é duplicado ou triplicado. No início do mês seguinte todos os preços têm se tornado diferentes.

Prove que a razão $\dfrac{\textit{preço} \quad \textit{máximo}}{\textit{preço} \quad \textit{mínimo}}$ é maior do que 27.

Problema 4
Tem-se 25 pedaços de queijo, com 25 pesos diferentes. Pretende-se, cortar um desses pedaços em dois e distribuir os 26 pedaços nos dois pratos de uma balança de modo que:

- Cada prato tenha 13 pedaços de queijo;
- O total dos pesos dos dois pratos sejam iguais;
- Os dois pedaços de queijo cortados estejam distribuídos um em cada prato da balança.

Diga, justificando, se é possível fazer tal distribuição.

Problema 5
É possível encontrar 100.000 inteiros positivos distintos tais que a soma de qualquer coleção desses números não seja um quadrado perfeito? Justifique.

Problema 6

Prove que o produto das 99 frações do tipo $\frac{k^3-1}{k^3+1}$, com $k = 2, 3, 4, ..., 99, 100$, é maior do que $\frac{2}{3}$.

Problema 7

O pentágono ABCDE possui um círculo inscrito, de tal maneira que as diagonais AD e CE interceptam-se no centro, O, do círculo.
Prove que o segmento BO e o lado DE são perpendiculares.

Problema 8

Pinta-se de branco um tabuleiro 8 x 8 (com 64 quadrados unitários). Uma operação permitida é: escolher um retângulo formado por 3 dos 64 quadrados unitários e pintar cada um de seus quadrados unitários com uma cor oposta *(se o quadrado for branco, pinta-se de preto; se for preto, pinta-se de branco)*.
Com esta operação, é possível pintar todos os 64 quadrados unitários do tabuleiro de preto?

Problema 9

Divide-se uma faixa retangular 1 por 10 em 10 quadrados unitários. Distribui-se os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 nos quadrados da maneira seguinte. Escreve-se o número 1 num quadrado qualquer; escreve-se o 2 em qualquer quadrado vizinho ao número 1; o 3 em qualquer livre vizinho a um dos quadrado já ocupados; e assim por diante.
Seguindo este procedimento, quantas permutações (diferentes) dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 podem ser arranjadas?

Problema 10

Divide-se em quadrados unitários, uma faixa 1 por 100. Alice e Bob, jogando alternadamente, disputam o jogo descrito a seguir. Existem 98 fichas, todas elas numa caixa próxima à faixa. Alice, que inicia o jogo, pode escolher 17 fichas ou menos disso, das que estão fora da faixa. Ela, então, as coloca na faixa, em quadrados vazios, sendo uma só ficha por quadrado unitário. Bob pode retirar qualquer número de fichas que ocupam quadrados consecutivos e colocá-las de volta à caixa. Alice vence o jogo se ela consegue colocar as 98 fichas na faixa, de modo que estas fichas ocupem quadrados consecutivos.

(a) Descubra uma estratégia de jogo para Alice vencer.
(b) Qual é o maior número de fichas, maior do que 98, que permite uma estratégia vencedora para Alice?

Problema 11

No plano, pinte quatro pontos de azul e outros quatro de vermelho, de tal maneira que quaisquer três destes pontos de mesma cor são vértices de um paralelogramo, cujo quarto vértice é da outra cor.

Problema 12
Encontre 10 inteiros consecutivos tais que a soma de seus quadrados seja igual a soma dos quadrados dos próximos 9 inteiros consecutivos.

Problema 13
Encontre 100 inteiros positivos tais que a soma deles seja igual ao Mínimo Múltiplo Comum de todos eles.

Problema 14
Tem-se uma folha de papel quadrada, que se pretende cortá-la em retângulos com lados 3 e 4.
Prove que o número total de triângulos é par.

Problema 15
Num jogo, para dois adversários, que jogam alternadamente, o primeiro jogador pinta um ponto do plano de vermelho, o segundo jogador pinta de azul 10 pontos ainda não pintados, e assim por diante. O primeiro jogador vence o jogo se ele consegue pintar de vermelho três pontos que sejam vértices de um triângulo equilátero.
O segundo jogador pode evitar que o primeiro jogador vença o jogo?

Problema 16
Seja N um número inteiro positivo. A equação $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N}$ admite 2005 soluções inteiras positivas.
Prove que N é um quadrado perfeito.

Problema 17
Encontre o menor inteiro n maior do que 1 para o qual a média aritmética dos números $1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2$ é um quadrado perfeito.

Problema 18
Em cada vértice e em cada lado de um hexágono escreve-se um número. Cada número escrito no vértice é igual à soma dos dois números nos lados vizinhos. Suponha que todos os números escritos nos lados e em um dos vértices fossem apagados.
É possível achar o número que foi apagado no vértice?