OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA

DO RIO GRANDE DO NORTE

COLETÂNEA DE PROBLEMAS

PARA TREINAMENTO(*)

ENDEREÇO ELETRÔNICO: www.ufrn.br/olimpiada

COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO – Nº 01

NÍVEL I (ENSINO FUNDAMENTAL: 5ª e 6ª Séries)

***PROBLEMA* 1**

Numa loteria, todos os prêmios em reais são potências de 13 (isto é, R$ 1,00, R$ 13,00, R$ 169,00 etc.) e o prêmio total é de R$ 1.000.000,00.
Num sorteio, qual é o número mínimo possível de prêmios distribuídos?

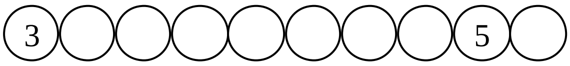
PROBLEMA 2

Numa escola, estudantes inventaram uma máquina que "tritura" frações. A máquina funciona do seguinte modo: se introduzimos uma fração **F**, ela devolve a fração $\dfrac{1-F}{1+F}$. Por exemplo: se introduzimos na máquina a fração $\dfrac{1}{5}$, sai a fração $\dfrac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \dfrac{2}{3}$.

Um dos estudantes colocou na máquina a fração $\dfrac{1}{5}$. Em seguida, a fração resultante foi novamente colocada na máquina, obtendo-se uma outra fração; o novo resultado foi colocado na máquina e, assim por diante, até que a máquina completou 2001 "triturações".

Que fração apareceu no final?

PROBLEMA 3
Escreva um número em cada círculo da fila abaixo, de modo que a soma de três números quaisquer vizinhos (consecutivos) seja 12.



Que número deve estar escrito no último círculo à direita?

PROBLEMA 4
Em uma urna há 28 bolas azuis, 20 bolas verdes, 12 bolas amarelas, 10 bolas pretas e 8 bolas brancas.
Qual é o número mínimo de bolas que devemos sacar dessa urna para termos certeza que sacaremos pelo menos 15 bolas da mesma cor?

PROBLEMA 5
Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelho) dispostos num quadrado da seguinte maneira:

1 *	2 *	3 *
4 *	5 *	6 *
7 *	8 *	9 *

Apertando-se um botão do bordo do quadrado, muda a cor da luz dele e de cada um dos os vizinhos (isto é, se a cor da luz do botão é vermelha, torna-se verde, e vice-versa). Apertando-se o botão do centro, muda a cor da luz de todos os 8 vizinhos, mas a dele não se altera.
Apertando-se sucessivamente alguns botões, é possível acender todas as luzes com cor verde, se inicialmente estavam todas acesas com a cor vermelha?

PROBLEMA 6
Como o médico me recomendou caminhadas, todo dia de manhã dou uma volta (com velocidade constante) na quadra em que resido. Minha mulher aproveita para correr (com velocidade constante) em volta do quarteirão. Saímos juntos e chegamos juntos. Ela percorre a quadra no mesmo sentido que eu e me ultrapassa duas vezes durante o percurso. Se ela corresse no sentido contrário ao meu, quantas vezes ela cruzaria comigo?

PROBLEMA 7
No edifício mais alto de *Terra Brasilis* moram *Eduardo* e *Augusto*. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de *Augusto*. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164.
Calcule o número do apartamento de *Eduardo* sabendo que há 12 apartamentos por andar.
(Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante).

PROBLEMA 8
São dados 98 cartões. Em cada um deles está escrito um dos números 1, 2, 3, …, 98 (não existem números repetidos). Pode-se ordenar os 98 cartões de tal modo que ao considerar dois cartões

consecutivos a diferença entre o número maior e o número menor escritos neles seja sempre maior que 48.
Indicar como e de quantas formas é possível efetuar a ordenação.

PROBLEMA 9
Os adeptos do clube A. B. C. celebram, desde 1902 e de 5 em 5 anos, uma festa em honra do seu clube. Por sua vez, os adeptos do clube C. B. A. celebram, desde 1903 e de 7 em 7 anos, uma festa em honra do seu clube.
Quais os anos entre 1900 e 2002 em que coincidem as celebrações dos dois clubes?

PROBLEMA 10
Maria e João disputaram um jogo no qual são atribuídos 2 pontos por vitória e deduzido um ponto em caso de derrota, não sendo possível ocorrer empate. Inicialmente, cada um deles tinha 5 pontos.
Se João ganhou exatamente três partidas e Maria no final ficou com 10 pontos, quantas partidas disputaram?

PROBLEMA 11
Encontre todos os pares de inteiros positivos (m, n), com $m + n \leq 100$, e que satisfazem $\dfrac{m+n^{-1}}{m^{-1}+n} = 13$.

PROBLEMA 12
Branca de Neve distribuiu para os sete anões a sua colheita de cogumelos de 707 unidades. Começando pelo menor dos sete anões, e por ordem crescente das suas alturas, cada anão recebe mais um cogumelo do que o anão anterior.
Quantos cogumelos receberá o maior dos anões?

PROBLEMA 13
Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345 para que o número restante seja o maior possível

PROBLEMA 14
Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa na pista em 30 segundos, enquanto que Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta.
Quando Carlinhos completar a volta número 80, Paulinho estará completando a volta de que número?

PROBLEMA 15
João quer desfazer-se de sua coleção de 1.000 bolinhas. Para tanto escolhe dez garotos da rua onde mora. Dá ao primeiro garoto x bolinhas, ao segundo $x + 1$ bolinhas. Assim faz até chegar ao décimo garoto. Sempre dá uma bolinha a mais para o próximo garoto. No final, João ainda fica com um resto de bolinhas.
Se x é o número que deixa João com o menor resto possível, qual é o valor de x?

PROBLEMA 16
Em 2001, o custo de produção de N caixas de bananas foi de r reais. Pelo aperfeiçoamento dos métodos de produção, no ano 2002 o custo de N + 1000 caixas foi de $r - 5000$ reais.
(a) Calcule o preço por caixa em 2001 e em 2002.
(b) Calcule quanto mais barato foi o custo por caixa em 2002.

PROBLEMA 17

Uma cooperativa agrícola semeou na primeira semana, $\frac{5}{18}$ de um terreno dedicado a semeadura de trigo. Na segunda semana semeou $\frac{8}{27}$, na terceira semana $\frac{12}{31}$ da superfície semeada nas duas primeiras semana e na quarta semana, 40 hectares menos do que na primeira semana.
Determinar a superfície semeada em cada semana.

PROBLEMA 18
Para cada uma das 31 galinhas, preparou-se um decalitro de comida por semana. Isto foi feito supondo que o número de galinhas fosse invariável. Como diminuía uma galinha por semana, a comida durou o dobro do tempo planejado.
Que quantidade de comida foi preparada e para quanto tempo foi planejada?

PROBLEMA 19
Considere os números obtidos repetindo-se sucessivamente 1988: 1988, 19881988, 198819881988, 1988198819881988, ...
Em que passo aparece, pela primeira vez, um múltiplo de 126?

PROBLEMA 20
Enquanto o sono não vinha, Plácido viu dez carneirinhos pularem a cerca, o que levou exatamente 10 minutos.
Se a insônia prosseguir e os carneirinhos continuarem no mesmo ritmo, quantos pularão em 1 hora?

PROBLEMA 21
Escreva em ordem crescente os seguintes números inteiros 2^{5555}, 3^{3333}, 6^{2222}.
Justifique sua resposta.

PROBLEMA 22
Sara escreveu no quadro negro um número inteiro de menos de trinta algarismos e que termina em 2. Célia apaga o 2 do fim e escreve-o no início. O número que fica é igual ao dobro do número que tinha escrito Sara.
Qual é o número que Sara escreveu?

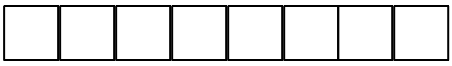
PROBLEMA 23
Temos três caixas, uma azul, uma branca e uma vermelha, e 8 bolinhas. Cada bolinha tem um número de 1 a 8, sem repetições. Distribuímos as 8 bolinhas nas caixas, de maneira que há pelo menos duas bolinhas em cada caixa. Logo, em cada caixa, somam-se todos os números escritos nas bolinhas contidas na caixa. Os três resultados denominam-se soma azul, soma branca e soma vermelha, segundo a cor da caixa correspondente. Encontre todas as possíveis distribuições das bolinhas tais que a soma vermelha seja igual ao dobro da soma azul, e a soma vermelha menos a soma branca seja igual à soma branca menos a soma azul.

PROBLEMA 24
Utilizando exclusivamente números primos forma-se um conjunto com as seguintes condições:
- Qualquer número primo de um algarismo pode estar no conjunto.

- ❖ Para que um número primo de mais de um algarismo esteja no conjunto, devem estar no conjunto o número que se obtém ao suprimir-lhe só o primeiro algarismo e também o número que se obtém ao suprimir-lhe só o último algarismo.

Determine, entre conjuntos que cumpram estas condições, aquele que tem maior quantidade de elementos. Justifique por que não pode haver um com mais elementos.
(*Lembre-se de que o número 1 não é primo*).

PROBLEMA 25
Num tabuleiro de 8 casas, como na figura abaixo, há inicialmente uma ficha em cada casa.
Uma jogada consiste em escolher duas fichas e mover uma delas uma casa à direita e a outra, uma casa à esquerda.
Se depois de 4 jogadas as 8 fichas estão distribuídas somente em 2 casas, determine quais podem ser estas casas e quantas fichas há em cada uma delas.



PROBLEMA 26
Um alfaiate tem um grande pedaço de tecido. Ele resolve dividir o pedaço de tecidos em 5 pedaços. Em seguida, escolhe *alguns* desses pedaços e corta cada um deles em cinco pedaços. Do total dos pedaços de tecidos resultante, o alfaiate escolhe, novamente, *alguns* deles e corta cada um em cinco pedaços.
Continuando desse modo, o alfaiate pode obter 2002 pedaços de tecido?

PROBLEMA 27
Vinte pessoas compareceram a um baile. Maria dançou com sete rapazes; Olga com oito; Vera com nove e, assim por diante, até que Nina dançou com todos eles. Quantos rapazes havia na festa?

PROBLEMA 28
Três corredores, X, Y e Z, participam de uma corrida. Na saída, Z teve problemas, partindo em último lugar, enquanto Y foi o segundo. Durante a corrida, Z mudou de posição 6 vezes com os outros corredores, enquanto X mudou 5 vezes. Sabe-se que no final Y chegou na frente de X.
Qual foi a ordem de chegada dos três corredores?

PROBLEMA 29
Quinze elefantes estão dispostos numa linha. Seus pesos são expressos com números inteiros de quilogramas. A soma do peso de cada elefante (exceto aquele da extrema direita) com o dobro do peso do seu vizinho à direita é igual 15 toneladas.
Determine o peso de cada elefante.

PROBLEMA 30
O número 123 é mostrado na tela de um computador. A cada minuto o computador soma 102 ao número que está na tela. Sempre que desejar, Misha, um expert em programação, pode mudar a ordem dos algarismos do número que aparece na tela.
Explique como ele pode garantir que nenhum número de 4 algarismos aparecerá na tela.

RESPOSTAS

PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA
1	16	11	Existem 7 pares	21	3^{3333}, 2^{5555}, 6^{2222}
2	2/3	12	104	22	105263157894736842

3	3	13	553451234512345	23	Existem 13 soluções distintas
4	59	14	75	24	{2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373}
5	Não	15	95	25	Existem 4 soluções possíveis
6	4	16	*(a)r/N; e (r-5000)/N+1000* *(b) A diferença entre os dois números obtidos em (a)*	26	Não
7	1997	17	150, 160, 120, 110	27	13
8	Existem duas maneiras distintas de efetuar a ordenação	18	496 dal para 16 semanas	28	Y, X, Z
9	1917, 1952, 1987	19	Nono	29	Cada elefante pesa 5000 kg.
10	7	20	60	30	Veja onde e como ele pode alterar a ordem dos algarismos dos números que aparecem no visor.

COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO – Nº 02

NÍVEL II (ENSINO FUNDAMENTAL: 7ª e 8ª Séries)

PROBLEMA 1
Considere o conjunto dos 100 números: 1, 1/2, 1/3, ..., 1/100. Eliminam-se dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número $a + b + ab$, ficando, assim, o conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, resta só um número. Que valores pode ter esse número?

PROBLEMA 2
Um equipamento eletrônico consiste de um visor e de duas teclas A e B. Ao ligarmos o equipamento, aparece um zero no visor. Apertando-se a tecla A, o número que está no visor é aumentado de 1 unidade e apertando-se a tecla B, o número que está no visor é multiplicado por dois. Sejam x e y respectivamente as menores quantidades de vezes que devemos apertar as teclas A e B para obter o número 1994.
Qual é o valor da diferença (y – x)?

PROBLEMA 3
Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais.
Inicialmente há sobre a mesa só uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.

PROBLEMA 4
A direção de uma sociedade secreta é formada por 4 pessoas. Para admitir novos sócios usam os seguintes critérios:

- Votam somente os 4 integrantes da diretoria, podendo cada um fazê-lo de 3 modos: a favor, contra ou abstendo-se.
- Cada aspirante a sócio deve obter pelo menos 2 votos a favor e nenhum contra.

Na última reunião da diretoria examinam-se 8 pedidos de ingresso. No total de votos dados houveram 23 votos a favor, 2 votos contra e 7 abstenções.

Qual é o maior e qual é o menor valor que pode ter a quantidade de pedidos de ingresso aprovados nessa ocasião?

PROBLEMA 5
Natália e Marcela contam de 1 em 1 começando juntas desde o número 1, mas a velocidade de Marcela é o triplo da velocidade de Natália (quando Natalia diz o segundo número, Marcela diz o quarto número). Quando a diferença dos números que elas dizem em uníssono é algum dos múltiplos de 29, entre 500 e 600, Natália segue fazendo a conta normalmente e Marcela começa a contar de maneira descendente de modo que, num momento, as duas dizem em uníssono o mesmo número.
Qual é o número?

PROBLEMA 6
Júlia tem 289 moedas guardadas em caixas: Todas as caixas contêm a mesma quantidade de moedas (que é maior que 1) e em cada caixa só há moedas de um mesmo pais.
As moedas da Bolívia são mais de 6% do total, as do Chile mais de 12% do total, as do México mais de 24% e as do Peru mais de 36% do total. Pode Júlia ter alguma moeda do Uruguai?

PROBLEMA 7
Comprei um lápis, uma borracha e um caderno por R$ 100, 00. Se cada caderno custa mais do que dois lápis, três lápis mais do que quatro borrachas e três borrachas custam mais do que um caderno, quanto custa cada um desses objetos?

PROBLEMA 8
Temos 105 moedas, entre as quais sabemos que existem três falsas. Quaisquer duas moedas autênticas têm o mesmo peso e seu peso é maior do que qualquer falsa. Quaisquer duas moedas falsas têm, também, o mesmo peso.
Indique de que maneira podemos selecionar 26 moedas autênticas realizando somente duas pesagens em uma balança de dois pratos.

PROBLEMA 9
O dono de uma loja de ferragens comprou uma partida de parafusos em caixas fechadas e os vende avulsos: nunca tem mais de uma caixa aberta. No fim da segunda-feira restam 2208 parafusos, no fim da terça-feira há ainda 1616 parafusos e no fim da quarta-feira há ainda 973 parafusos.
Para controlar os empregados, todas as noites anota a quantidade de parafusos que há na única caixa aberta. A quantidade anotada na terça-feira é o triplo do que anotou na segunda e a quantidade anotada na quarta é o dobro da de segunda-feira.
Quantos parafusos há em cada caixa fechada se se sabe que são menos de 500?

PROBLEMA 10
Num tabuleiro de xadrez (8 x 8) estão escritos ordenadamente os números de 1 a 64; na primeira fileira, de esquerda a direita estão os números de 1 a 8, na segunda fileira, de esquerda a direita são

colocados de 9 a 16, etc. São colocados sinais + ou – a cada número de maneira que em cada fileira há 4 sinais + e 4 sinais –, e o mesmo ocorre em cada coluna. Somam-se os 64 números obtidos. Encontre todos os possíveis resultados desta soma.

PROBLEMA 11
Dissolve-se leite em pó em dois copos com água. No primeiro copo há 40 cl com 30 gr de leite em pó, enquanto no segundo contém 24 cl com 42 gr de leite em pó. Num terceiro copo, desejamos colocar 30 cl, com uma concentração de 1,2 gr/cl, retirando conteúdos dos dois copos iniciais.
Que volume deve-se retirar de cada um deles?

PROBLEMA 12
Um cubo de madeira é formado a partir de n^3 cubos unitários, onde n é um número natural maior do que 2. Pinta-se todas as suas faces de vermelho e desfaz-se o cubo. Verifica-se que o número de cubos unitários com exatamente uma face pintada de vermelho é igual ao número de cubos unitários sem qualquer face pintada.
Qual é o valor de n?

PROBLEMA 13
Temos dezessete cartas vermelhas, numeradas de 1 a 17 e dezessete cartas brancas, numeradas de 1 a 17. Formar dezessete pares de 1 carta vermelha e 1 carta branca tais que a soma dos dezessete pares sejam 17 números consecutivos.

PROBLEMA 14
Dado um hexágono, escreve-se um número em cada lado e em cada vértice. Cada número num vértice é igual à soma dos números nos lados vizinhos. Suponha que todos os números escritos nos lados e num dos vértices tenham sido apagados.
É possível recuperar o número que tenha sido escrito no vértice?

PROBLEMA 15
Temos um tabuleiro de m x n casas. Atribui-se inicialmente um número inteiro não negativo a cada uma das casas. No tabuleiro é permitido efetuar a seguinte operação: em qualquer par de casas com um lado em comum podem-se modificar os dois números somando-lhes um mesmo número inteiro (que pode ser negativo), sempre que ambos resultados sejam não negativos.
Que condições devem ser satisfeitas inicialmente na atribuição dos números, para deixar, mediante aplicações reiteradas da operação, zero em todas as casas?

PROBLEMA 16
Num jogo eletrônico de perguntas e respostas, por cada resposta certa do jogador se somam 5 pontos na tela, por cada resposta errada se retiram 2 pontos e quando o jogador não responde, não se soma nem se retira pontos. Cada jogo tem 30 perguntas. Francisco fez 5 jogos todos com a mesma pontuação, maior que zero, mas a quantidade de acertos, erros e perguntas sem resposta em cada jogo foi diferente.
Diga todas as possíveis pontuações que Francisco pode ter obtido.

PROBLEMA 17
Rodolfo e Gabriela têm 9 fichas numeradas de 1 até 9 e se entretém com o seguinte jogo. Retiram, alternadamente, 3 fichas cada um, com as seguintes regras:

(a) Rodolfo começa o jogo, escolhendo uma ficha e nas jogadas seguintes deve retirar, a cada vez que jogar, uma ficha com três unidades menores do que a última retirada por Gabriela;

(b) Gabriela, na sua vez de jogar, escolhe a primeira ficha e nas jogadas seguintes deve retirar, a cada vez que jogar, uma ficha duas unidades menor do que a última que ela mesma escolheu.
(c) Vence o que obtiver o maior número ao somar os números de suas três fichas;
(d) Se o jogo não pode ser finalizado, há um empate.

Se os dois jogam sem cometer erros, como Rodolfo deve jogar para ter certeza que não vai perder?

PROBLEMA 18
São dados 98 pontos sobre uma circunferência. Maria e José jogam alternadamente da seguinte maneira: cada um deles traça um segmento unindo dois dos pontos dados que não tenham sido unidos entre si anteriormente. O jogo termina quando os 98 pontos tenham sido usados como extremos de um segmento pelo menos uma vez. O vencedor é a pessoa que faz o último traço. Se o José começa o jogo, quem pode garantir a sua própria vitória?

PROBLEMA 19
Qual é a *2002-ésima* letra da seqüência:
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB......?

PROBLEMA 20
Verônica, Ana e Gabriela estão formando uma roda e se divertindo com o seguinte jogo. Uma delas escolhe um número e diz em voz alta; a que está a sua esquerda o divide pelo seu maior divisor primo e diz o resultado em voz alta e assim sucessivamente. Ganhará aquela que disser em voz alta o número 1, momento em que o jogo termina. Ana escolheu um número maior que 50 e menor que 100 e ganhou. Verônica escolheu o número seguinte ao escolhido por Ana e também ganhou.
Determinar todos os números que possam ter sido escolhidos por Ana.

PROBLEMA 21
Chamam-se *múltiplos consecutivos de 5* aos números inteiros que vêm um depois do outro, na ordem natural. Por exemplo, 15, 20 e 25 são múltiplos consecutivos de 5.
(i) Encontrem três múltiplos consecutivos de 5 cuja soma seja 7380.
(ii) Encontre três múltiplos consecutivos de 5 cuja soma seja 37185.

PROBLEMA 22
Escreve-se no quadro negro os números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 , 11, 12. Em cada passo escolhe-se dois desses números, eliminam-se esse dois elementos e se inclui, no lugar deles, sua soma ou sua diferença (calculada: o maior menos o menor). Aplicando-se sucessivamente esse passo:
(a) É possível obter uma lista com todos os números iguais a 10?
(b) É possível obter uma lista com todos os números iguais a 16?
(c) É possível obter uma lista com todos os números iguais a 24?

PROBLEMA 23
Seja $ABCD$ um quadrado e F um ponto qualquer do lado BC. Traça-se por B a perpendicular à reta DF que corta a reta DC em Q
Quanto mede o ângulo FQC?

PROBLEMA 24
Considere um tabuleiro quadriculado de 10×10. Um "movimento" no tabuleiro se faz avançando 7 quadrados para a direita e 3 quadrados para baixo. No caso de se sair por uma linha se continua pelo começo (esquerda) da mesma linha e no caso de acabar uma coluna se continua pelo começo da mesma coluna (acima).
Onde se deve começar para que depois de 1996 movimentos terminemos num vértice?

PROBLEMA 25
Dado um polígono regular de 2001 lados, diga, justificando, se é possível desenhar uma reta que intercepte todos os seus 2001 lados, sem passar por qualquer vértice.

PROBLEMA 26
Quantas vezes por dia os ponteiros das horas e o dos minutos formam um ângulo reto?

PROBLEMA 27
Antônio desenhou, em duas folhas de papel, dois tabuleiros quadriculados com 2004 linhas e 2004 colunas (um em cada folha e os dois tabuleiros de mesmas dimensões). Em seguida, pintou de azul alguns dos quadrados unitários de um dos tabuleiros e os restantes de amarelo, fazendo o mesmo no outro tabuleiro, tendo o cuidado de pintar tantos quadrados unitários de um dos tabuleiros de azul quantos os que tinha pintado no outro. Enquanto a tinta ainda estava fresca, sobrepôs os dois tabuleiros de modo que as cores se misturassem.
Mostre que o número de quadrados verdes que Antônio obteve no final é *par*.

PROBLEMA 28
Em cada quadrado unitário de um tabuleiro 5 por 5 coloca-se um número inteiro, de tal modo que cada número colocado é a média de dois dos número que estão em quadrados adjacentes (i. e. que possuem um lado em comum).
Qual é a máxima quantidade de números distintos que podem aparecer no tabuleiro?

PROBLEMA 29
Encontre um subconjunto B do conjunto A = {1, 2, 3, 4, ..., 39, 40}, de tal maneira que B tenha 26 elementos e que nenhum produto de dois elementos de B seja um quadrado perfeito.

PROBLEMA 30
No fim do ano, os garotos de uma escola de futebol votam para escolher o melhor companheiro. Este ano foram votados 5 garotos. Cada um obteve 6 votos menos que o anterior e Pedro, que é o quinto, obteve 10 votos.
Quantos votos obteve o melhor companheiro? No total, quantos garotos votaram?

RESPOSTAS

PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA
1	100	11	Do 1º Copo: 16,5 cl Do 2º Copo: 13,5 cl	21	(i) 2455, 2460, 2465 (ii) 12390, 12395, 12400
2	3	12	8	22	(a) SIM (b) SIM (c) SM
3	Não	13	Observe que a soma máxima de dois cartões é 26 e a mínima é 10.	23	
4	Maior: 7; Menor: 4	14	Sim	24	
5	436	15	A soma dos números colocados nas casas brancas é igual à soma dos números colocados nas casas	25	Não

			pretas		
6	Não	16	3, 5 ou 10	26	44
7	L: R$26,00; B:R$19,00; C: R$55,00	17	Não existe estratégia ganhadora para Rodolfo. Para não perder, ele tenta só garantir que o jogo não se complete	27	-
8	-	18		28	19
9	313	19	B	29	-
10	Zero	20	63, 75 ou 98	30	34; 110

COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO – Nº 03

NÍVEL III (ENSINO MÉDIO)

***PROBLEMA* 1**
Uma calculadora tem o número 1 na tela. Devemos efetuar 2001 operações, cada uma das quais consistindo em pressionar a tecla ***sen*** ou a tecla ***cos***. Essas operações calculam respectivamente o seno e o cosseno com argumentos em radianos. Qual é o maior resultado possível depois das 2001 operações?

PROBLEMA 2
Se a n-ésima OBM é realizada em um ano que é divisível por n, dizemos que esse ano é super-olímpico. Por exemplo, o ano 2001, em que está sendo realizada a 23a OBM, é super-olímpico pois $2001 = 87 \times 23$ é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

PROBLEMA 3
Determine todas as funções f tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$, para todos os números reais x e y.

PROBLEMA 4:
A avenida Providência tem infinitos semáforos igualmente espaçados e sincronizados. A distância entre dois semáforos consecutivos é de 1.500 m. Os semáforos ficam abertos por 1 min 30s, depois fechados por 1 min, depois abertos por 1 min 30s e assim sucessivamente. Suponha que um carro trafegue com velocidade constante igual a v, em m/s, pela avenida Providência.
Para quais valores de v é possível que o carro passe por uma quantidade arbitrariamente grande de semáforos sem parar em qualquer um deles?

PROBLEMA 5
Em Tumbólia existem n times de futebol. Deseja-se organizar um campeonato em que cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros. Todos os jogos ocorrem aos domingos, e um time não pode jogar mais de uma vez no mesmo dia.
Determine o menor inteiro positivo m para o qual é possível realizar um tal campeonato em m domingos.

PROBLEMA 6

Os números inteiros positivos são escritos em ordem, como abaixo, com o 1 aparecendo uma vez, o 2 duas vezes, o 3 três vezes, ..., com o 57 aparecendo cinqüenta e sete vezes, e assim por diante:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, ...

Nesta seqüência, quando se escreve os primeiros 2001 algarismos, quantas vezes o número 9 aparece?

PROBLEMA 7
Dois estudantes disputam o seguinte jogo, em que jogam alternadamente. Cada jogada consiste em substituir, no sistema abaixo, um asterisco, * , por um número.

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0 \\ *x + *y + *z = 0 \\ *x + *y + *z = 0 \end{cases}$$

Depois que todos os asteriscos são substituídos por números, o primeiro jogador vence o jogo se o sistema admite uma solução não-nula. Caso contrário, o segundo vence.

Descreva a estratégia pela qual o primeiro jogador vence o jogo.

PROBLEMA 8
Suponha que cada um dos seis conjuntos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ possui 4 elementos e que cada um dos n conjuntos $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ tenha 2 elementos. Seja

$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup .... \cup B_n$$

Sabendo-se que cada elemento de S pertence a exatamente quatro dos conjuntos $A_{i's}$ e a exatamente três dos conjuntos $B_{j's}$, encontre o valor de n.

PROBLEMA 9
Duas caixas contém ao todo 65 bolas de vários diâmetros diferentes. Cada bola é ou branca, ou preta, ou vermelha, ou amarela. Se você retirar quaisquer 5 bolas de mesma cor, no mínimo duas delas serão de mesmo diâmetro.
Prove que existe no mínimo três bolas que estão na mesma caixa, tendo a mesma cor e com o mesmo diâmetro.

PROBLEMA 10
Desenha-se numa folha de papel um quadrado. Em seguida, o quadrado é recortado em 25 quadrados menores, sendo que exatamente 24 deles são quadrados unitários.
Encontre o valor da área do quadrado original.

PROBLEMA 11
Escreve-se a seguinte expressão no quadro negro:

$$*\frac{1}{1}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*....*\frac{1}{12}$$

(a) Prove que é impossível substituir cada asterisco por um sinal: + ou - de maneira que a expressão seja zero.

(b) Qual é o número mínimo de frações que podem ser removidas da lista (cada fração é removida da lista com o correspondente asterisco), de modo que a expressão restante torne-se zero quando substituímos cada asterisco por um sinal: + ou -?

PROBLEMA 12
Um saco contém 2001 bolas vermelhas e 2001 bolas azuis. A seguinte operação é permitida: retiramos duas bolas por vez e

i. se elas são de mesma cor, descartamos essas bolas;

ii. se elas são de cores distintas, descartamos a bola preta e colocamos de volta a bola vermelha.

Executando sucessivamente essa operação, qual é a probabilidade de que no final tenhamos uma bola vermelha no saco?

PROBLEMA 13
Escreve-se no quadro-negro o número S = 1!.2!.3!.4!...99!.100! (o produto dos primeiros 100 fatorais).

Desses fatoriais, qual temos de apagar para obter $\frac{S}{k!}$ um quadrado perfeito?

PROBLEMA 14
Considere a coleção de todos os subconjuntos de {1, 2, 3, 4, ..., 299, 300} que possuem três elementos. Dentre esses subconjuntos, quantos são os que a soma de seus três elementos é um número divisível por 3?

PROBLEMA 15
Seja A um subconjunto de {1, 11, 21, 31, 41,...., 541, 551} possuindo a propriedade: a soma de qualquer par de elementos de A é distinta de 552.

Prove que A não pode ter mais do que 28 elementos.

PROBLEMA 16
Dispõe-se de duas urnas, cada uma contendo um número arbitrário de bolas (ambas as urnas não estão vazias no início). São permitidos dois tipos de operação:

i) retirar simultaneamente um número igual de bolas de ambas as urnas; e

ii) dobrar o número de bolas em qualquer uma das urnas.

Mostre que: executando essas operações um número finito de vezes, podemos esvaziar as duas urnas.

PROBLEMA 17
Diga, justificando, se é possível desenhar no plano um hexágono convexo tal que:

i) todos os ângulos interiores têm a mesma medida;

ii) o comprimentos dos lados são: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (em alguma ordem).

PROBLEMA 18
Existem quantos subconjuntos de X = {1, 2, 3, ..., 19, 20), com três elementos, tais que o produto dos três elementos de cada subconjunto seja divisível por 4?

PROBLEMA 19
Seja A = {1, 2, 3, ..., 99, 100) e B um subconjunto qualquer de A com 48 elementos.

Mostre que B possui dois elementos distintos, x e y, tais que $x + y$ é divisível por 11.

PROBLEMA 20

Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que: $(1+\frac{a}{b}).(1+\frac{b}{c}).(1+\frac{c}{a}) \geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

PROBLEMA 21

Se a, b são dois números reais positivos tais que $a + b = 1$, prove que $(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$

PROBLEMA 22

Sabendo-se que $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, qual é o maior valor possível de $3x + 4y$?

PROBLEMA 23

Do conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n-1, n\}$ apagam-se 5 inteiros que formam uma progressão aritmética. A soma dos números restantes é 5000.
Determine todos os valores de n para os quais isso é possível e determine as possíveis seqüência dos cinco números apagados.

PROBLEMA 24

Cada quadrado numa faixa 1 x 10 pode ser pintado ou de azul ou de vermelho, mas dois quadrados adjacentes não podem ser pintados de azul.
De quantas maneiras podemos realizar essa pintura?

PROBLEMA 25

Dado sete números reais arbitrários distintos, mostre que existem dois deles, x e y, tais que:
$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

PROBLEMA 26

Escreve-se no quadro-negro dezessete inteiros positivos distintos, tais que nenhum deles possui um fator primo maior do que 10. Mostre que o produto de algum par desses números é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 27

Numa classe de 25 estudantes as carteiras são arrumadas em 5 filas e 5 colunas. Se um estudante pode se mover de uma carteira para a carteira imediatamente à sua frente, ou para a imediatamente atrás ou para a imediatamente à sua direita ou à sua esquerda, podem todos os 25 estudantes, simultaneamente, se moverem, cada um ocupando uma outra carteira?

PROBLEMA 28

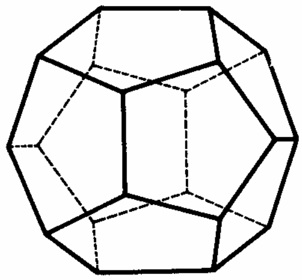
As raízes de dois polinômios do segundo grau são inteiros negativos e eles possuem uma raiz em comum. Podem os valores dos polinômios em algum inteiro positivo ser 19 e 98?

PROBLEMA 29

Prove que: dentre todos os triângulos com um perímetro dado o triângulo eqüilátero possui a maior área.

PROBLEMA 30

Um calendário de mesa consiste de um dodecaedro regular com um mês diferente sobre cada uma de suas doze faces pentagonais. De quantas maneiras, essencialmente distintas, podemos arrumar os meses nas faces do dodecaedro para formar o calendário? *(Se uma arrumação puder ser obtida de outra por uma rotação, as duas* ***não*** *são essencialmente distintas).*



DODECAEDRO

(*) Os problemas foram compilados das provas de diversas olimpíadas de matemática: Olimpíada Brasileira de Matemática, Olimpíada de Maio, Olimpíada de Matemática do Cone Sul, Olimpíada Iberoamericana de Matemática, da Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte, de Olimpíadas Regionais e de listas de problemas de matemática na INTERNET.

Informações Adicionais sobre a
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE
podem ser obtidas no endereço:

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Fone: (84) 215.3820 ou 215.3819
FAX: (84) 215.9219
Caixa Postal 1214 - CEP 59075-970 Natal RN
Home-Page: www.ufrn.br/olimpiada

Informações sobre a
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
podem ser obtidas no endereço eletrônico:
www.obm.org.br