Olimpíada Brasileira de Matemática		Sociedade Brasileira de Matemática		

LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO

PROBLEMA 1

Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelho) dispostos num quadrado da seguinte maneira:

1 ●	2 ●	3 ●
4●	5 ●	6 ●
7 ●	8 ●	9 ●

Apertando-se um botão do bordo do quadrado, muda a cor da luz dele e de cada um dos os vizinhos (isto é, se a cor da luz do botão é vermelha, torna-se verde, e vice-versa). Apertando-se o botão do centro, muda a cor da luz de todos os 8 vizinhos, mas a dele não se altera.

Apertando-se sucessivamente alguns botões, é possível acender todas as luzes com cor verde, se inicialmente estavam todas acesas com a cor vermelha?

PROBLEMA 2

Diga, justificando, se é possível traçar 2005 segmentos no plano de modo que cada um deles corte exatamente 3 dos outros segmentos.

SOLUÇÃO

Não é possível.

Seja N o número de cortes. Se somarmos, de 1 até 2005, o número de segmentos que se cortam com um dado segmento, cada corte é contado duas vezes. Portanto, obteremos o número 2N. Se a hipótese do enunciado acontece, tem-se 2005 . 3 = 2N. Mas, 2005 . 3 é um número ímpar e 2N é par. Contradição.

PROBLEMA 3

Tem-se 2000 moedas aparentemente iguais. Duas delas são falsas: uma é mais leve e a outra mais pesada que cada moeda autêntica. É possível realizar não mais do que 4 pesagens numa balança de dois pratos, mas sem pesos. Mostre como determinar qual é a mais pesada, a soma dos pesos das duas moedas falsas ou a soma de duas moedas autênticas, ou se ambas estas quantidades são iguais.

SOLUÇÃO

Divida as moedas em 4 grupos, cada um contendo 500 moedas, e sejam A_1, A_2, A_3, A_4 respectivamente os pesos totais das moedas em cada grupo. Compare A_1 com A_2 e A_3 com A_4. É fácil ver que todos os possíveis casos reduzem-se aos três seguinte:

(a) $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$.
Neste caso, as duas moedas falsas pertencem ao mesmo grupo, e a soma de seus pesos é igual a soma de 2 moedas autênticas. Neste caso, duas pesagens são suficientes.

(b) $A_1 = A_2$, $A_3 > A_4$.
Neste caso, juntamos o primeiro grupo com o terceiro e o segundo com o quarto, formando dois grupos. Comparando o peso destes dois novos grupos, chegamos facilmente a uma respostas. Neste caso, 3 pesagens são suficientes.

(b) $A_1 > A_2$, $A_3 > A_4$.
Nesta situação, existem duas possibilidades. Ou a moeda mais pesada pertence ao primeiro grupo e a mais leve ao quarto, ou a mais pesada pertence ao terceiro grupo e a mais leve ao segundo. Comparando os pesos de A_1 e A_4, saberemos em quais subcasos estaremos. Em seguida, comparamos os pesos de $A_1 + A_4$ com $A_2 + A_3$ para obter a resposta final. Neste caso, precisamos de 4 pesagens.

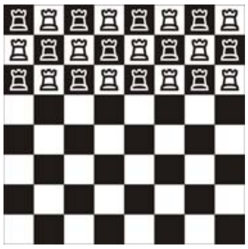
PROBLEMA 4
Colocam-se oito peças num tabuleiro de xadrez (8 x 8) de maneira que em cada linha e em cada coluna contenha exatamente uma peça. Prove que existe um número par de peças nos quadrados pretos do tabuleiro.
SOLUÇÃO

Coloca-se 1, 2 e 3 nos quadrados do tabuleiro da seguinte forma:

	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3

Chamemos os quadrados pretos com número ímpar de *quadrados de primeiro tipo*, os quadrados pretos com número par de *quadrados de segundo tipo*, e os quadrados brancos com número ímpares de *quadrados de terceiro tipo*.
Suponha que existem n_i quadrados do tipo i, com i = 1, 2, 3. Dos dados do problema, temos que: $n_1 + n_3 = 4$ e $n_2 + n_3 = 4$. Portanto, $n_1 = n_2$, e o número de peças nos quadrados pretos é igual $n_1 + n_2 = 2n_1$, que é um número par.

PROBLEMA 5
Num tabuleiro de xadrez (8 x 8), colocam-se 24 peças iguais, de modo que elas ocupem as três primeiras filas, veja figura abaixo.



Podemos mudar a posição das peças de acordo com a seguinte regra: uma peça pode saltar por cima de outra para um novo quadrado vazio, tanto num movimento horizontal (para a esquerda ou direita), vertical (para cima e para baixo) ou diagonalmente.
Diga, justificando, se, com esta regra, podemos colocar todas as peças nas três últimas filas.
SOLUÇÃO

Não podemos.
Para ver isso, pintemos os quadrados unitários do tabuleiro com quatro cores, segundo a paridade da fila e a coluna que ocupam. Deste modo, cada peça move-se sempre para um quadrado de mesma cor que ele ocupa anteriormente. Mas o número de quadrados de cada cor que estão ocupados nas posições iniciais e finais é distinto.

PROBLEMA 6
Encontre todas as funções $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tais que $f(f(n)) = n + 2$, para todo número natural n.
SOLUÇÃO

Seja f uma função que satisfaz as condições do enunciado.
Seja $f(1) = a$. Daí, aplicando f a cada membro, obtemos $f(f(1)) = f(a) = 1 + 2 = 3$. Desta maneira, temos $f(f(a)) = f(3) = a + 2$. Seguindo esse raciocínio: $f(n) = n + a - 1$, se n é ímpar. Por outro lado, se $f(2) = b$, temos $f(f(2)) = f(b) = 2 + 2 = 4$. Daí, obtemos uma expressão para $f(n)$, se n é par: $f(n) = n + b - 2$.
Agora, se a é ímpar, $3 = f(a) = 2a - 1$. Logo, $a = 2$. Contradição, pois a é ímpar.
Se b é par, $4 = f(b) = 2b - 2$. Logo, $b = 3$. Contradição, pois b é par.
Assim, a é par e b é ímpar. Se tem $3 = f(a) = a + b - 2$, $4 = f(b) = a + b - 1$. Em ambos os casos, obtemos $a + b = 5$.
Novamente as cinco condições $f(n) = n + a - 1$, se n é ímpar, $f(n) = n + b - 2$, se n é par, a é par, b é ímpar, $a + b = 5$ são necessárias e suficiente para que f satisfaça a condição dada. As únicas possibilidades são, ou $a = 2$, $b = 3$ ou $a = 4$, $b = 1$. No primeiro caso, obteremos $f(n) = n + 1$, para todo $n \in \mathbf{N}$. No outro caso, obteremos

$$f(x) = \begin{cases} n+3, & se \quad n \quad é \quad ímpar \\ n-1, & se \quad n \quad é \quad par \end{cases}$$

PROBLEMA 7

Cada quadrado unitário de um tabuleiro 2002×2002 contém um número não nulo, de tal maneira que não importa como coloquemos 2002 torres, sem que uma ataque a outra, o produto dos 2002 números cobertos pelas torres permanece o mesmo. No quadrado unitário do canto superior esquerdo do tabuleiro tem o número 1, no do canto superior direito tem o número 14 e no do canto inferior esquerdo tem o número 143. Que número aparece no canto inferior direito?

(Duas torre se atacam mutuamente se elas estão na mesma linha ou na mesma coluna)