Olimpíada Brasileira de Matemática		Sociedade Brasileira de Matemática		

LISTA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO

PROBLEMA 1

Colocar 3 gatos e 5 ratos numa quadrado com 5 colunas verticais e horizontais de modo que o rato não fique perto do gato (na mesma linha, diagonal ou fileira), pois, senão, o gato come o rato.

SOLUÇÃO

	R	R		
	R			R
				R
G				
G			G	

PROBLEMA 2

Retiram-se x litros de vinho de um barril de 100 litros e adicionam-se ao mesmo x litros de água. Feito isso, retiram-se do barril outros x litros e depois se colocam mais x litros de água. No final, resulta um conteúdo de 36 litros de água e 64 de vinho.

Quanto vale x?

SOLUÇÃO

A quantidade de água no fim = total de água adicionada - quantidade de água retirada na segunda drenagem. Assim, temos: $36 = 2x - (x/100).x$, que é o mesmo que: $x^2 - 200x + 3600 = 0$, que implica $x = 20$ ou $x = 180$. Como $x < 100$ (tamanho do barril), temos que $x = 20$.

PROBLEMA 3

(ITA-SP) Há muito tempo quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão,

foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encomendado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a idéia, na madrugada, de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a no mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde, o segundo marinheiro teve exatamente a mesma idéia. Indo ao baú ele separou as moedas em dois montes iguais e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã, os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas do baú em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada um dos marinheiros a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos.
Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17, qual era o número de moedas que havia originalmente no baú?
SOLUÇÃO

Seja x = total de moedas.
A primeira divisão pode ser expressa como: $pd = (x-1)/2$, onde pd significa primeira divisão. A segunda divisão pode ser expressa como: $sd = (pd-1)/2 = (x-3)/4$, onde sd significa segunda divisão. A terceira divisão pode ser expressa como:
$td = (sd-1)/2 = (x-7)/8$.
O primeiro marinheiro, pm, recebeu: $pm = pd+td = (5x-11)/8$
O segundo marinheiro, sm, recebeu: $sm = sd+td = (3x-13)/8$.
Como:
$17pm = 29sm$, temos $85x - 187 = 87x - 377$, que é o mesmo que $2x = 190$, que resulta em $x = 95$. Logo, primeiro marinheiro recebeu $58 = 47+11$. O segundo marinheiro recebeu
$34 = 23+11$ moedas. Foram lançadas ao mar 2 moedas, o imediato ficou com 1 moeda. O total de moedas era igual a $58 + 34 + 2 + 1 = 95$.

PROBLEMA 4
Um grilo dá saltos numa linha reta. Seu primeiro salto mede 1cm, o segundo 2 cm, e assim por diante. Em cada instante ele salta 1 cm a mais. Cada salto é feito para frente ou para trás. É possível que depois de 2003 saltos esteja a 1 cm da posição que estava inicialmente?
SOLUÇÃO

O problema quer saber se N = + ou - 1 + ou - 2 + ou - 3 ... + ou - 2003 pode ser igual a 1 ou a -1. Bem, a paridade de N é igual a paridade de
$1 + 2 + ... + 2003 = 2003.(2004/2) = 2003.1002$, que é par. Logo, N não pode ser impar e, em particular, não pode ser igual a 1 ou a -1.

PROBLEMA 5

Sete inteiros positivos são escolhidos no conjunto {1, 2, 3, ..., 126}. Mostre que, não importa a maneira que se faça a escolha, dentre os sete escolhidos existem dois inteiros, x e y, tais que $x < y \leq 2x$. O número 126 pode ser substituído por um inteiro maior?
SOLUÇÃO

Considere a seguinte partição do conjunto A = {1, 2,...,126} nos seguintes 6 subconjuntos:

$$\{1,2\}\cup\{3,4,5,6\}\cup\{7,8,...,14\}\cup\{15,16,...,30\}\cup\{31,32,...,62\}\cup\{63,64,...126\}$$

Como são escolhidos 7 elementos de A, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem (pelo menos) 2 deles que pertencerão ao mesmo subconjunto da partição. Chamemo-los de x e y, com $x < y$.
Para $a = 1, 3, 7, 15, 31$ ou 63, teremos $a \leq x < y \leq 2a \leq 2x$.
Se ao invés de 126 tivéssemos 127, poderíamos escolher os inteiros 1, 3, 7, 15, 31, 63 e 127 e, como é fácil verificar, $3 > 2.1$, $7 > 2.3$, $15 > 2.7$, $31 > 2.15$, $63 > 2.31$ e $127 > 2.63$ ==> nenhum par de inteiros $\{x, y\}$ ($x < y$) dentre os escolhidos satisfaria a $x < y \leq 2x$ ==> 126 não pode ser substituído por um inteiro maior.

PROBLEMA 6
Os inteiros de 1 a 1000 são escritos ordenadamente em torno de um círculo. Partindo de 1, riscamos os números de 15 em 15, isto é, riscamos 1,16,31, ... O processo continua até se atingir um número previamente riscado.
Determine a quantidade de números que sobram sem riscos.
SOLUÇÃO

São riscados apenas números da forma $5k+1$ e depois de três voltas todos estes são riscados. São riscados, portanto, 200 números e sobram 800 sem riscar.

PROBLEMA 7
Em uma ilha há dois tipos de pessoas: cavaleiros, que sempre dizem a verdade, e trapaceiros, que sempre mentem. Um certo dia, os 2003 habitantes da ilha se reúnem em assembléia. Eles se sentam aleatoriamente em torno de uma enorme mesa redonda e cada um deles declara: "Meus dois vizinhos de mesa são trapaceiros". No dia seguinte, a assembléia se reúne novamente, mas um dos membros está doente e não comparece. Novamente, eles se sentam aleatoriamente ao redorda mesa, e cada um declara: "Meus dois vizinhos de mesa pertencem a uma categoria que não é a minha".
O sujeito que ficou doente era trapaceiro ou cavaleiro?
SOLUÇÃO

"Meus dois vizinhos de mesa são trapaceiros"
No primeiro dia, temos então duas leis que são facilmente verificadas:
1) Um cavaleiro terá sempre vizinhos trapaceiros.
2) Ao menos 1 dos vizinhos de um trapaceiro é um cavaleiro.

São 2003 pessoas, e 2003 é ímpar. Logo, se C é o número de cavaleiros e T o de trapaceiros, então C e T não podem ter mesma paridade. Observe agora que existe ao menos um par de trapaceiros consecutivos, pois sabemos que isso não poderia acontecer entre dois cavaleiros. De fato, se não houvesse dois trapaceiros consecutivos, então $T = C$, e ambos teriam mesma paridade, o que é impossível. Logo, existem ao menos 2 trapaceiros vizinhos na mesa.

Com isso, temos que $C + 1 <= T <= 2.C$, visto que não pode haver mais do que 2 trapaceiros entre dois cavaleiros, pois isso contrariaria a lei (2). Vamos ao segundo dia. "Meus dois vizinhos de mesa pertencem a uma categoria que não é a minha". Agora, as leis são:

1) Um cavaleiro tem os dois vizinhos trapaceiros.
2) Um trapaceiro tem pelo menos um vizinho trapaceiro.

Isto significa que agora há pelo menos 2 trapaceiros entre 2 cavaleiros seguidos, isto é, se T' é o número de trapaceiros e C' o de cavaleiros, então $T' \geq 2.C'$. Suponha que o individuo que saiu era trapaceiro. Logo, T' nos leva a uma contradição, pois, pelo que vimos no primeiro dia, $T'= 2.C'$. Assim, o adoentado era um cavaleiro.