Material do minicurso a ser lecionado no III EREM-Mossoró-UERN
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Edição N$^{\underline{0}}$ 3 outubro 2011

NÚMEROS COMPLEXOS

DAVID ZAVALETA VILLANUEVA [1]

[1]CCET-UFRN, Natal, RN, Brasil, e-mail: villanueva@ccet.ufrn.br

Sumário

1 Números Complexos **2**

1.1 Introdução 2

1.2 Definição de Número Complexo 2

1.2.1 Propriedades das Operações 3

1.3 Interpretação Geométrica dos Números Complexos 4

1.4 Forma Trigonométrica e Fórmula de Moivre 5

1.4.1 Fórmula de Moivre 6

1.4.2 Raiz de um Número Complexo 6

1.5 Função Exponencial 8

1.6 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas 10

Referências Bibliográficas **11**

Capítulo 1

Números Complexos

1.1 Introdução

Vamos introduzir os números complexos a partir de uma simples equação quadrática da forma

$$x^2 + 1 = 0, \tag{1.1}$$

que como sabemos não possui solução no campo dos números reais. A pergunta que devemos responder é a seguinte: como resolver esta equação?.

É necessário estender o sistema dos números reais para um sistema de números onde possamos resolver equações da forma (1.1). Construiremos este novo sistema a partir dos pontos do plano.

1.2 Definição de Número Complexo

O par de números da forma (x, y), onde x e y são números reais chama-se número complexo se para eles está definido a igualdade e as operações de soma e multiplicação da seguinte forma:

1. Dois números complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais, se e somente se, quando $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

2. A soma de dois números complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é outro número complexo $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

3. O produto de dois números complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é outro número complexo $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Para denotar a igualdade, soma e produto de dois números complexos usamos a notação:

$$\left.\begin{array}{l} (x_1, y_1) = (x_2, y_2), \quad \Longleftrightarrow \; x_1 = x_2 \text{ e } \; y_1 = y_2; \\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \\ (x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Em particular, da fórmula (1.2), observa-se que as operações definidas acima com números complexos da forma $(x, 0)$, isto é

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0).(x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$$

correspondem com as mesmas operações que realizamos nos números reais. Por este motivo os números complexos da forma $(x, 0)$ identifica-se com os números reais x.

O número complexo $(0, 1)$ denotado por i chama-se unidade imaginária. Usando o produto em (1.2), vemos que

$$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Da fórmula (1.2) também podemos notar

$$(0, y) = (0, 1)(y, 0) = iy, \text{ por tanto } (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Desta forma cada número complexo (x, y) pode-se escrever na forma $x + iy$ e chama-se, forma algébrica do número complexo. O número complexo da forma iy chama-se imaginário puro. Em particular, o número 0, isto é o número complexo $(0, 0)$, é único, é real e imaginário ao mesmo tempo.

Seja $z = x + iy$, onde x a parte real de z e y a parte imaginária de z, ou seja,

$$x = Re(x + iy) = Re(z), \quad y = Im(x + iy) = Im(z).$$

O número complexo $x - iy$ chama-se conjugado do número complexo $x + iy$ e denota-se por $\overline{z}$:

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

A operação de conjugação satisfaz as seguintes realações:

$$\overline{(\overline{z})} = z, \ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \ \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}, \ z + \overline{z} = 2x, \ z - \overline{z} = 2iy.$$

O número $\sqrt{x^2 + y^2}$ chama-se módulo do número complexo $z = x + iy$ e denota-se por $|z|$:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.3}$$

Daqui é fácil ver que

$$|z| = |\overline{z}| \text{ e } z.\overline{z} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Segue de (1.3) que $|z| = 0$ se e somente se $z = 0$, por este motivo $|z| \geq 0$.

1.2.1 Propriedades das Operações

As operações de soma e multiplicação satisfazem as seguintes propriedades:

- Comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2.z_1;$

- Associatividade: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2).z_3 = z_1(z_2.z_3);$

- Distribuitividade: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

Observa-se que os números 0(neutro) e 1(unidade), satisfazem

$$z + 0 = z, \ 1.z = z, \quad \text{para qualquer } z.$$

No conjunto dos números complexos a operação de soma possui uma operação inversa chamada de substração, isto é, para quaisquer números complexos z_1 e z_2 existe um único número complexo z tal que

$$z + z_2 = z_1.$$

Este número chama-se diferença dos números z_1 e z_2 e denota-se por $z_1 - z_2$.

A operação de multiplicação possui uma operação inversa chamada de divisão, isto é, para quaisquer números complexos z_1 e z_2 existe um único número complexo z tal que

$$z.z_2 = z_1, \quad \text{desde que } z_2 \neq 0. \tag{1.4}$$

Multipliquemos a equação (1.4) por $\overline{z}_2$, temos $z.z_2.\overline{z}_2 = z_1.\overline{z}_2$, donde,

$$z|z_2|^2 = z_1.\overline{z}_2, \quad |z_2| \neq 0.$$

Desta forma

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Exemplo 1.1

$$\begin{aligned}\frac{3-2i}{4+3i} &= \frac{(3-2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{12-9i-8i+6i^2}{4^2+3^2} = \\ &= \frac{6-17i}{25} = \frac{6}{25} - \frac{17}{25}i.\end{aligned}$$

1.3 Interpretação Geométrica dos Números Complexos

Suponhamos que no plano esteja definido o sistema retângular de coordenadas. O número complexo $z = x + iy$ representa-se como um ponto do plano com coordenadas (x, y). Observa-se que esta representação é única.

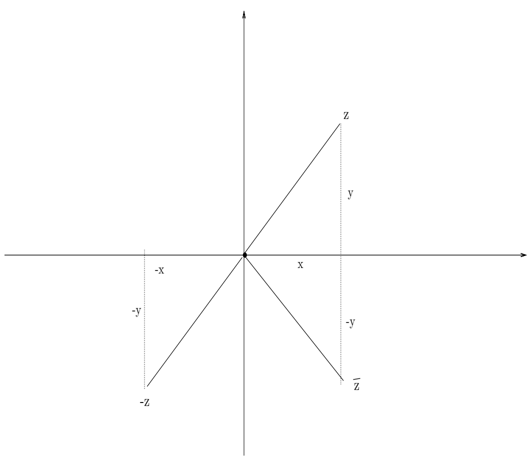

Figura 1.1: Plano Complexo

Das definições, podemos observar que z e $-z$ são simétricas com relação á origem 0 e os pontos z e $\overline{z}$ são simétricos com relação ao eixo real.

Segue do gráfico, que o ponto z pode ser identificado pelo vetor z, donde o comprimento $|z|$ do vetor z satisfaz as desigualdades

$$|Re(z)| \leq |z|, \qquad |Im(z)| \leq |z|.$$

É fácil mostrar

Proposição 1.3.1 (Desigualdade Triangular) . *Para quaisquer números complexos z_1 e z_2, temos as desigualdades:*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.4 Forma Trigonométrica e Fórmula de Moivre

Veremos agora que um número complexo não somente pode ser definido pelas coordenadas retangulares x e y se não também pelas coordenadas polares r e φ, onde $r = |z|$, é a distância da origem $(0,0)$ até o ponto z. φ é o ângulo entre o eixo real e o vetor z considerado no sentido positivo a partir do eixo real. Este ângulo chama-se argumento do número complexo $z(z \neq 0)$e denota-se por $\varphi = argz$.

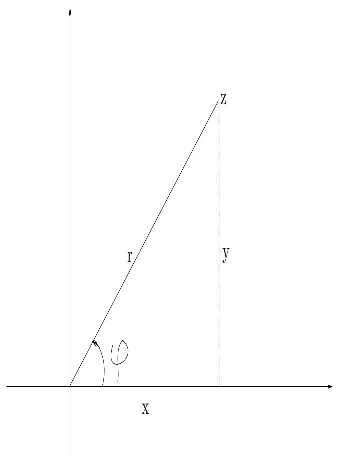

Figura 1.2: Coordenadas polares

Da figura acima vemos que

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{1.5}$$

Desta forma qualquer número complexo podemos escrever na seguinte forma

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

chamado de forma trigonométrica do número complexo z.

Da fórmula (1.5) obtemos

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Notemos que o sistema (1.5) possui infinitas soluções, pois as funções cos e sin são funções periódicas de período 2π, assim todas as soluções estão contidas nos ângulos $\varphi = \varphi_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, onde φ_o é uma das soluções do sistema (1.5) e chama-se valor principal do argumento φ. Para $z = 0$ o argumento não está definido.

Exemplo 1.2 *Escrevamos na forma trigonométrica o número* $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *De fato, temos* $r = |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Como* $x = -\frac{1}{2}$ *e* $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, *então o ponto* z *está no terceiro quadrante, ou seja* $\varphi_o = \frac{4\pi}{3}$ *e* $\varphi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$. *desta forma,*

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

1.4.1 Fórmula de Moivre

Consideremos o produto dos números complexos $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] = \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Em particular se $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, então $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.
Da fórmula (1.6) segue a fórmula de Moivre [1].

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.7}$$

Em particular, se $r = 1$ a fórmula (1.7) fica

$$z^n = [(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.8}$$

Exemplo 1.3 *Usemos a fórmula de Moivre para calcular o produto* $(1 + i\sqrt{3})^4(1 - i)^3$. *Pela fórmula (1.7), temos*

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^4(1 - i)^3 &= \left[2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})\right]^4 \left[\sqrt{2}(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right))\right]^3 = \\ &= 16(\cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3})\sqrt{8}(\cos\left(-\tfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{3\pi}{4}\right)) = \\ &= 16(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{8}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \\ &= 16\left(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)\right). \end{aligned}$$

1.4.2 Raiz de um Número Complexo

A n-ésima raiz do número complexo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ chama-se o número

$$\sqrt[n]{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{1/n} = \rho(\cos\xi + i\sin\xi),$$

se

$$\rho^n(\cos n\xi + i\sin n\xi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Donde obtemos expressões para ρ e ξ: $\rho^n = r$, $n\xi = \varphi + 2k\pi$, ou seja,

$$\rho = \sqrt{r}, \quad \xi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Definitivamente obtemos a fórmula

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1. \tag{1.9}$$

Desta forma, se $z \neq 0$, então obtemos n diferentes raizes, pois para valores de k maiores que $n-1$, os argumentos serão diferentes dos obtidos num valor de 2π, que é o período das funções seno e coseno.

Exemplo 1.4 *Determinar todas as raizes cúbicas de i, ou seja, determine todos os valores de $\sqrt[3]{i}$.*

Como o módulo de i é igual a 1 e o valor do argumento é $\frac{\pi}{2}$, temos

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}, \quad (k = 0,1,2).$$

Assim, obtemos os 3 valores:

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad k = 0;\\
\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad k = 1;\\
\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6} &= -i, \qquad k = 2.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.5 *Definir todos os valores de $\sqrt[n]{1}$, ou seja todas as raizes n-ésimas da unidade.*

Como o módulo de 1 é igual a 1 e o valor do argumento é 0, temos

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$

Se $k = 1$, obtemos o valor da raiz

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

isto é, todas as raizes da equação $z^n = 1$ obtem-se de

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},, \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1). \tag{1.10}$$

Teorema 1.4.1 *A soma das n raizes de um número complexo $z^n = r$ é zero.*

Prova: De fato, as n raizes da equação $z^n = r$ são dadas pelas fórmulas $\sqrt[n]{r}\varepsilon^k$, $k = 0,1,2,\ldots n-1$, e ε^k definido por (1.10), assim:

- $z_o = \sqrt[n]{r}$

- $z_1 = \sqrt[n]{r}\varepsilon = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})$

- $z_2 = \sqrt[n]{r}\varepsilon^2 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n})$

- $z_3 = \sqrt[n]{r}\varepsilon^3 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n})$

  $\vdots$

- $z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\varepsilon^{n-1} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n})$.

É fácil ver que as n raizes $z_o, z_1, \ldots, z_{n-1}$ formam uma progresão geométrica com razão $q = \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Seja $S_n = z_o + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1}$ a soma das n raizes de z obtidas acima, e considerando que :
$\varepsilon^n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n}\right) = 1$, então

$$S_n = \sqrt[n]{r}\frac{z_o - q^n}{1-q} = \sqrt[n]{r}\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} = \sqrt[n]{r}\frac{1-1}{1-\varepsilon} = 0. \qquad \blacksquare$$

1.5 Função Exponencial

Vamos estender a função exponencial e^x definido quando $x \in \mathbb{R}$ para o caso de exponente complexo. Quando $x \in \mathbb{R}$, a função exponencial e^x pode ser desenvolvida na seguinte série:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Definimos analogamente a série para o caso da função exponencial com $x = iy$, ou seja,

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots$$

Separando os termos reais e imaginários, temos

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right),$$

donde lembrando que os desenvolvimentos das funções seno e coseno são respectivamente:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

obtemos

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \qquad (1.11)$$

Trocado y por $-y$ na equação (1.11), obtemos

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y. \qquad (1.12)$$

Resolvendo as equações (1.11) e (1.12) com relação as funções seno e coseno, obtemos as fórmulas de Euler que expressa as funções trigonométricas através das funções exponenciais com expoentes imaginários:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \tag{1.13}$$

A fórmula (1.11) nós permite escrever o número complexo dada em forma trigonométrica na forma exponencial:

$$re^{i\varphi} = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Seja $x + iy$ um número complexo arbitrário, então

$$e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right). \tag{1.14}$$

Agora ficou fácil, definir o produto de duas funçõe exponenciais para $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right).e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right).$$

De fato, usando a fórmula (1.6) para o produto de dois números complexos obtemos:

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1 y_2)\right) = e^{x_1+x_2}.e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+iy_1}.e^{x_2+iy_2} = e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Analogamente

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1}.e^{-z_2} = e^{z_1-z_2}.$$

Em geral, para $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\left(e^z\right)^n = e^z.e^z \ldots e^z = e^{nz}, \quad \left(e^{-z}\right)^n = e^{-z}.e^{-z} \ldots e^{-z} = e^{-nz}.$$

Aplicação

Usando a fórmula de Euler, podemos obter uma expressão para qualquer potência positiva das funções $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ e para os seus produtos das mesmas potências,

$$\cos^n\varphi = \frac{\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^n}{2^n}; \quad \sin^n\varphi = \frac{\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)^n}{2^n i^n}. \tag{1.15}$$

Exemplo 1.5.1

$$\begin{aligned}
\cos^4\varphi &= \frac{\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^4}{2^4} = \frac{e^{4i\varphi}}{16} + \frac{4e^{2i\varphi}}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4e^{-2i\varphi}}{16} + \frac{e^{-4i\varphi}}{16} = \\
&= \frac{1}{8}\frac{e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2} + \frac{3}{8} = \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.5.2

$$\begin{aligned}
\sin^4\varphi\cos^3\varphi &= \frac{\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)^4}{2^4 i^4}.\frac{\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^3}{2^3} = \frac{\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right)^3\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)}{128} = \\
&= \frac{\left(e^{6i\varphi} - 3e^{2i\varphi} + 3e^{-2i\varphi} - e^{-6i\varphi}\right)\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)}{128} = \\
&= \frac{\left(e^{7i\varphi} - e^{5i\varphi} - 3e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} - 3e^{-3i\varphi} - e^{-5i\varphi} + e^{-7i\varphi}\right)}{128} = \\
&= \frac{3}{64}\cos\varphi - \frac{3}{64}\cos 3\varphi - \frac{1}{64}\cos 5\varphi + \frac{1}{64}\cos 7\varphi.
\end{aligned}$$

1.6 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

Até agora estudamos as funções trigonométricas somente no caso de variável real. Definamos as funções trigonométricas para variável complexa pela fórmula de Euler:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Usando estas fórmulas e as propriedades da função exponencial podemos verificar as seguintes fórmulas(VERIFIQUE!!!!!!!!):

$$\begin{aligned} &\sin^2 z + \cos^2 z = 1; \\ &\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1; \\ &\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \cos z_2. \end{aligned}$$

Introduzamos agora a noção de funções hiperbólicas. O coseno e seno hiperbólico definem-se pelas fórmulas:

$$\cosh z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \sinh z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

em particular quando $z = x$, obtemos

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-ix}}{2}.$$

Usando estas fórmulas, não é difícil verificar as seguintes relações:

$$\begin{cases} \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \\ \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2; \\ \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2; \\ \sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z, \quad \cosh 2z = \cosh^2 z - \sinh^2 z. \end{cases}$$

Desta forma aparece a trigonometria hiperbólica com fórmulas análogas as fórmulas da trigonometria do círculo. Trocando nas fórmulas da trigonometria usual o $\sin z$ por $i \sinh z$ e $\cos z$ por $\cosh z$ obtemos as fórmulas análogas na trigonometria hiperbólica.

Referências Bibliográficas

[1] A.G. Kurosh, *Curso de Álgebra Superior*(ruso), Nauka, Moscou, 1971.