COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO (*)

NÍVEL II (ENSINO FUNDAMENTAL: 7ª e 8ª Séries)

PROBLEMA 1
Considere o conjunto dos 100 números: 1, 1/2, 1/3, ..., 1/100. Eliminam-se dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número $a + b + ab$, ficando, assim, o conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, resta só um número. Que valores pode ter esse número?

PROBLEMA 2
Um equipamento eletrônico consiste de um visor e de duas teclas A e B. Ao ligarmos o equipamento, aparece um zero no visor. Apertando-se a tecla A, o número que está no visor é aumentado de 1 unidade e apertando-se a tecla B, o número que está no visor é multiplicado por dois. Sejam x e y respectivamente as menores quantidades de vezes que devemos apertar as teclas A e B para obter o número 1994.
Qual é o valor da diferença $(y - x)$?

PROBLEMA 3
Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais.
Inicialmente há sobre a mesa só uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.

PROBLEMA 4
A direção de uma sociedade secreta é formada por 4 pessoas. Para admitir novos sócios usam os seguintes critérios:

i) Votam somente os 4 integrantes da diretoria, podendo cada um fazê-lo de 3 modos: a favor, contra ou abstendo-se.
ii) Cada aspirante a sócio deve obter pelo menos 2 votos a favor e nenhum contra.

Na última reunião da diretoria examinam-se 8 pedidos de ingresso. No total de votos dados houveram 23 votos a favor, 2 votos contra e 7 abstenções.

Qual é o maior e qual é o menor valor que pode ter a quantidade de pedidos de ingresso aprovados nessa ocasião?

PROBLEMA 5
Natália e Marcela contam de 1 em 1 começando juntas desde o número 1, mas a velocidade de Marcela é o triplo da velocidade de Natália (quando Natalia diz o segundo número, Marcela diz o quarto número). Quando a diferença dos números que elas dizem em uníssono é algum dos múltiplos de 29, entre 500 e 600, Natália segue fazendo a conta normalmente e Marcela começa a contar de maneira descendente de modo que, num momento, as duas dizem em uníssono o mesmo número.
Qual é o número?

PROBLEMA 6
Júlia tem 289 moedas guardadas em caixas: Todas as caixas contêm a mesma quantidade de moedas (que é maior que 1) e em cada caixa só há moedas de um mesmo pais.
As moedas da Bolívia são mais de 6% do total, as do Chile mais de 12% do total, as do México mais de 24% e as do Peru mais de 36% do total. Pode Júlia ter alguma moeda do Uruguai?

PROBLEMA 7
Comprei um lápis, uma borracha e um caderno por R$ 100, 00. Se cada caderno custa mais do que dois lápis, três lápis mais do que quatro borrachas e três borrachas custam mais do que um caderno, quanto custa cada um desses objetos?

PROBLEMA 8
Temos 105 moedas, entre as quais sabemos que existem três falsas. Quaisquer duas moedas autênticas têm o mesmo peso e seu peso é maior do que qualquer falsa. Quaisquer duas moedas falsas têm, também, o mesmo peso.
Indique de que maneira podemos selecionar 26 moedas autênticas realizando somente duas pesagens em uma balança de dois pratos.

PROBLEMA 9
O dono de uma loja de ferragens comprou uma partida de parafusos em caixas fechadas e os vende avulsos: nunca tem mais de uma caixa aberta. No fim da segunda-feira restam 2208 parafusos, no fim da terça-feira há ainda 1616 parafusos e no fim da quarta-feira há ainda 973 parafusos.
Para controlar os empregados, todas as noites anota a quantidade de parafusos que há na única caixa aberta. A quantidade anotada na terça-feira é o triplo do que anotou na segunda e a quantidade anotada na quarta é o dobro da de segunda-feira.
Quantos parafusos há em cada caixa fechada se se sabe que são menos de 500?

PROBLEMA 10
Num tabuleiro de xadrez (8 x 8) estão escritos ordenadamente os números de 1 a 64; na primeira fileira, de esquerda a direita estão os números de 1 a 8, na segunda fileira, de esquerda a direita são colocados de 9 a 16, etc. São colocados sinais + ou – a cada número de maneira que em cada fileira há 4 sinais + e 4 sinais –, e o mesmo ocorre em cada coluna. Somam-se os 64 números obtidos.
Encontre todos os possíveis resultados desta soma.

PROBLEMA 11
Dissolve-se leite em pó em dois copos com água. No primeiro copo há 40 cl com 30 gr de leite em pó, enquanto no segundo contém 24 cl com 42 gr de leite em pó. Num terceiro copo, desejamos colocar 30 cl, com uma concentração de 1,2 gr/cl, retirando conteúdos dos dois copos iniciais.
Que volume devemos retirar de cada um deles?

PROBLEMA 12

Um cubo de madeira é formado a partir de n^3 cubos unitários, onde n é um número natural maior do que 2. Pinta-se todas as suas faces de vermelho e desfaz-se o cubo. Verifica-se que o número de cubos unitários com exatamente uma face pintada de vermelho é igual ao número de cubos unitários sem qualquer face pintada.
Qual é o valor de n?

PROBLEMA 13
Temos dezessete cartas vermelhas, numeradas de 1 a 17 e dezessete cartas brancas, numeradas de 1 a 17. Formar dezessete pares de 1 carta vermelha e 1 carta branca tais que a soma dos dezessete pares sejam 17 números consecutivos.

PROBLEMA 14
Dado um hexágono, escreve-se um número em cada lado e em cada vértice. Cada número num vértice é igual à soma dos números nos lados vizinhos. Suponha que todos os números escritos nos lados e num dos vértices tenham sido apagados.
É possível recuperar o número que tenha sido escrito no vértice?

PROBLEMA 15
Temos um tabuleiro de m x n casas. Atribui-se inicialmente um número inteiro não negativo a cada uma das casas. No tabuleiro é permitido efetuar a seguinte operação: em qualquer par de casas com um lado em comum podem-se modificar os dois números somando-lhes um mesmo número inteiro (que pode ser negativo), sempre que ambos resultados sejam não negativos.
Que condições devem ser satisfeitas inicialmente na atribuição dos números, para deixar, mediante aplicações reiteradas da operação, zero em todas as casas?

PROBLEMA 16
Num jogo eletrônico de perguntas e respostas, por cada resposta certa do jogador se somam 5 pontos na tela, por cada resposta errada se retiram 2 pontos e quando o jogador não responde, não se soma nem se retira pontos. Cada jogo tem 30 perguntas. Francisco fez 5 jogos todos com a mesma pontuação, maior que zero, mas a quantidade de acertos, erros e perguntas sem resposta em cada jogo foi diferente.
Diga todas as possíveis pontuações que Francisco pode ter obtido.

PROBLEMA 17
Rodolfo e Gabriela têm 9 fichas numeradas de 1 até 9 e se entretém com o seguinte jogo. Retiram, alternadamente, 3 fichas cada um, com as seguintes regras:

(a) Rodolfo começa o jogo, escolhendo uma ficha e nas jogadas seguintes deve retirar, a cada vez que jogar, uma ficha com três unidades menores do que a última retirada por Gabriela;
(b) Gabriela, na sua vez de jogar, escolhe a primeira ficha e nas jogadas seguintes deve retirar, a cada vez que jogar, uma ficha duas unidades menor do que a última que ela mesma escolheu.
(c) Vence o que obtiver o maior número ao somar os números de suas três fichas;
(d) Se o jogo não pode ser finalizado, há um empate.

Se os dois jogam sem cometer erros, como Rodolfo deve jogar para ter certeza que não vai perder?

PROBLEMA 18

São dados 98 pontos sobre uma circunferência. Maria e José jogam alternadamente da seguinte maneira: cada um deles traça um segmento unindo dois dos pontos dados que não tenham sido unidos entre si anteriormente. O jogo termina quando os 98 pontos tenham sido usados como extremos de um segmento pelo menos uma vez. O vencedor é a pessoa que faz o último traço. Se o José começa o jogo, quem pode garantir a sua própria vitória?

PROBLEMA 19

Qual é a *2002-ésima* letra da seqüência:
ABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCBABCDEDCB......?

PROBLEMA 20

Verônica, Ana e Gabriela estão formando uma roda e se divertindo com o seguinte jogo. Uma delas escolhe um número e diz em voz alta; a que está a sua esquerda o divide pelo seu maior divisor primo e diz o resultado em voz alta e assim sucessivamente. Ganhará aquela que disser em voz alta o número 1, momento em que o jogo termina. Ana escolheu um número maior que 50 e menor que 100 e ganhou. Verônica escolheu o número seguinte ao escolhido por Ana e também ganhou.
Determinar todos os números que possam ter sido escolhidos por Ana.

PROBLEMA 21

Chamam-se *múltiplos consecutivos de 5* aos números inteiros que vêm um depois do outro, na ordem natural. Por exemplo, 15, 20 e 25 são múltiplos consecutivos de 5.
(i) Encontrem três múltiplos consecutivos de 5 cuja soma seja 7380.
(ii) Encontre três múltiplos consecutivos de 5 cuja soma seja 37185.

PROBLEMA 22

Escreve-se no quadro negro os números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 , 11, 12. Em cada passo escolhe-se dois desses números, eliminam-se esse dois elementos e se inclui, no lugar deles, sua soma ou sua diferença (calculada: o maior menos o menor). Aplicando-se sucessivamente esse passo:
(a) É possível obter uma lista com todos os números iguais a 10?
(b) É possível obter uma lista com todos os números iguais a 16?
(c) É possível obter uma lista com todos os números iguais a 24?

PROBLEMA 23

Seja $ABCD$ um quadrado e F um ponto qualquer do lado BC. Traça-se por B a perpendicular à reta DF que corta a reta DC em Q
Quanto mede o ângulo FQC?

PROBLEMA 24

Considere um tabuleiro quadriculado de 10×10. Um “movimento” no tabuleiro se faz avançando 7 quadros para a direita e 3 quadros para baixo. No caso de se sair por uma linha

se continua pelo começo (esquerda) da mesma linha e no caso de acabar uma coluna se continua pelo começo da mesma coluna (acima).
Onde se deve começar para que depois de 1996 movimentos terminemos num vértice?

PROBLEMA 25
Dado um polígono regular de 2001 lados, diga, justificando, se é possível desenhar uma reta que intercepte todos os seus 2001 lados, sem passar por qualquer vértice.

PROBLEMA 26
Quantas vezes por dia os ponteiros da horas e o dos minutos formam um ângulo reto?

PROBLEMA 27
Antônio desenhou, em duas folhas de papel, dois tabuleiros quadriculados com 2000 linhas e 2000 colunas (um em cada folha e os dois tabuleiros de mesmas dimensões). Em seguida, pintou de azul alguns dos quadrados unitários de um dos tabuleiros e os restantes de amarelo, fazendo o mesmo no outro tabuleiro, tendo o cuidado de pintar tantos quadrados unitários de azul quantos os que tinha pintado no outro tabuleiro. Enquanto a tinta ainda estava fresca, sobrepôs os dois tabuleiros de modo que as cores se misturassem.
Mostre que o número de quadrados verdes que Antônio obteve no final é *par*.

PROBLEMA 28
Em cada quadrado unitário de um tabuleiro 5 por 5 coloca-se um número inteiro, de tal modo que cada número colocado é a média de dois dos número que estão em quadrados adjacentes (i. e. que possuem um lado em comum).
Qual é a máxima quantidade de números distintos que podem aparecer no tabuleiro?

PROBLEMA 29
Encontre um subconjunto B do conjunto A = {1, 2, 3, 4, ..., 39, 40}, de tal maneira que B tenha 26 elementos e que nenhum produto de dois elementos de B seja um quadrado perfeito.

PROBLEMA 30
No fim do ano, os garotos de uma escola de futebol votam para escolher o melhor companheiro. Este ano foram votados 5 garotos. Cada um obteve 6 votos menos que o anterior e Pedro, que é o quinto, obteve 10 votos.
Quantos votos obteve o melhor companheiro? No total, quantos garotos votaram?

RESPOSTAS

PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA	PROBL	RESPOSTA
1	100	11	Do 1º Copo: 16,5 cl Do 2º Copo: 13,5 cl	21	(i) 2455, 2460, 2465 (ii) 12390, 12395, 12400
2	3	12	8	22	(a) SIM

					(b) SIM (c) SM
3	Não	13	Observe que a soma máxima de dois cartões é 26 e a mínima é 10.	23	
4	Maior: 7; Menor: 4	14	Sim	24	
5	436	15	A soma dos números colocados nas casas brancas é igual à soma dos números colocados nas casas pretas	25	Não
6	Não	16	3, 5 ou 10	26	44
7	L: R$26,00; B:R$19,00; C: R$55,00	17	Não existe estratégia ganhadora para Rodolfo. Para não perder, ele tenta só garantir que o jogo não se complete	27	-
8	-	18		28	19
9	313	19	B	29	-
10	Zero	20	63, 75 ou 98	30	34; 110

(*) Os problemas foram compilados das provas de diversas olimpíadas de matemática: Olimpíada Brasileira de Matemática, Olimpíada de Maio, Olimpíada de Matemática do Cone Sul, Olimpíada Iberoamericana de Matemática, da Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte, de Olimpíadas Regionais e de listas de problemas de matemática na INTERNET.