COLETÂNEA DE PROBLEMAS PARA TREINAMENTO (*)

NÍVEL III (ENSINO MÉDIO)

***PROBLEMA* 1**

Uma calculadora tem o número 1 na tela. Devemos efetuar 2001 operações, cada uma das quais consistindo em pressionar a tecla ***sen*** ou a tecla ***cos***. Essas operações calculam respectivamente o seno e o cosseno com argumentos em radianos. Qual é o maior resultado possível depois das 2001 operações?

PROBLEMA 2

Se a n-ésima OBM é realizada em um ano que é divisível por n, dizemos que esse ano é super-olímpico. Por exemplo, o ano 2001, em que está sendo realizada a 23a OBM, é super-olímpico pois $2001 = 87 \times 23$ é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

PROBLEMA 3

Determine todas as funções tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$ para todos os reais x e y.

PROBLEMA 4:

A avenida Providência tem infinitos semáforos igualmente espaçados e sincronizados. A distância entre dois semáforos consecutivos é de 1.500 m. Os semáforos ficam abertos por 1 min 30s, depois fechados por 1 min, depois abertos por 1 min 30s e assim sucessivamente. Suponha que um carro trafegue com velocidade constante igual a v, em m/s, pela avenida Providência.

Para quais valores de v é possível que o carro passe por uma quantidade arbitrariamente grande de semáforos sem parar em qualquer um deles?

PROBLEMA 5

Em Tumbólia existem n times de futebol. Deseja-se organizar um campeonato em que cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros. Todos os jogos ocorrem aos domingos, e um time não pode jogar mais de uma vez no mesmo dia.

Determine o menor inteiro positivo m para o qual é possível realizar um tal campeonato em m domingos.

PROBLEMA 6

Os números inteiros positivos são escritos em ordem, como abaixo, com o 1 aparecendo uma vez, o 2 duas vezes, o 3 três vezes, ..., com o 57 aparecendo cinqüenta e sete vezes, e assim por diante:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, ...

Nesta seqüência, quando se escreve os primeiros 2001 algarismos, quantas vezes o número 9 aparece?

PROBLEMA 7

Dois estudantes disputam o seguinte jogo, em que jogam alternadamente. Cada jogada consiste em substituir, no sistema abaixo, um asterisco, * , por um número.

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0 \\ *x + *y + *z = 0 \\ *x + *y + *z = 0 \end{cases}$$

Depois que todos os asteriscos são substituídos por números, o primeiro jogador vence o jogo se o sistema admite uma solução não-nula. Caso contrário, o segundo vence.

Descreva a estratégia pela qual o primeiro jogador vence o jogo.

PROBLEMA 8

Suponha que cada um dos seis conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 possui 4 elementos e que cada um dos n conjuntos $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ tenha 2 elementos. Seja

$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup .... \cup B_n$$

Sabendo-se que cada elemento de S pertence a exatamente quatro dos conjuntos A_i´s e a exatamente três dos conjuntos B_j´s, encontre o valor de n.

PROBLEMA 9

Duas caixas contém ao todo 65 bolas de vários diâmetros diferentes. Cada bola é ou branca, ou preta, ou vermelha, ou amarela. Se você retirar quaisquer 5 bolas de mesma cor, no mínimo duas delas serão de mesmo diâmetro.
Prove que existe no mínimo três bolas que estão na mesma caixa, tendo a mesma cor e com o mesmo diâmetro.

PROBLEMA 10

Desenha-se numa folha de papel um quadrado. Em seguida, o quadrado é recortado em 25 quadrados menores, sendo que exatamente 24 deles são quadrados unitários.
Encontre o valor da área do quadrado original.

PROBLEMA 11

Escreve-se a seguinte expressão no quadro negro:

$$*\frac{1}{1}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*....*\frac{1}{12}$$

(a) Prove que é impossível substituir cada asterisco por um sinal: + ou - de maneira que a expressão seja zero.
(b) Qual é o número mínimo de frações que podem ser removidas da lista (cada fração é removida da lista com o correspondente asterisco), de modo que a expressão restante torne-se zero quando substituímos cada asterisco por um sinal: + ou -?

PROBLEMA 12
Um saco contém 2001 bolas vermelhas e 2001 bolas azuis. A seguinte operação é permitida: retiramos duas bolas por vez e
i. se elas são de mesma cor, descartamos essas bolas;
ii. se elas são de cores distintas, descartamos a bola preta e colocamos de volta a bola vermelha.
Executando sucessivamente essa operação, qual é a probabilidade de que no final tenhamos uma bola vermelha no saco?

PROBLEMA 13
Escreve-se no quadro-negro o número S = 1!.2!.3!.4!...99!.100! (o produto dos primeiros 100 fatorais).

Desses fatoriais, qual temos de apagar para obter $\frac{S}{k!}$ um quadrado perfeito?

PROBLEMA 14
Considere a coleção de todos os subconjuntos de {1, 2, 3, 4, ..., 299, 300} que possuem três elementos. Dentre esses subconjuntos, quantos são os que a soma de seus três elementos é um número divisível por 3?

PROBLEMA 15
Seja A um subconjunto de {1, 11, 21, 31, 41,...., 541, 551} possuindo a propriedade: a soma de qualquer par de elementos de A é distinta de 552.
Prove que A não pode ter mais do que 28 elementos.

PROBLEMA 16
Dispõe-se de duas urnas, cada uma contendo um número arbitrário de bolas (ambas as urnas não estão vazias no início). São permitidos dois tipos de operação:
i) retirar simultaneamente um número igual de bolas de ambas as urnas; e
ii) dobrar o número de bolas em qualquer uma das urnas.
Mostre que: executando essas operações um número finito de vezes, podemos esvaziar as duas urnas.

PROBLEMA 17
Diga, justificando, se é possível desenhar no plano um hexágono convexo tal que:
i) todos os ângulos interiores têm a mesma medida;
ii) o comprimentos dos lados são: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (em alguma ordem).

PROBLEMA 18
Existem quantos subconjuntos de X = {1, 2, 3, ..., 19, 20), com três elementos, tais que o produto dos três elementos de cada subconjunto seja divisível por 4?

PROBLEMA 19
Seja A = {1, 2, 3, ..., 99, 100) e B um subconjunto qualquer de A com 48 elementos.
Mostre que B possui dois elementos distintos, x e y, tais que $x + y$ é divisível por 11.

PROBLEMA 20

Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que: $(1+\frac{a}{b}).(1+\frac{b}{c}).(1+\frac{c}{a}) \geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

PROBLEMA 21

Se a, b são dois números reais positivos tais que $a + b = 1$, prove que

$$(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$$

PROBLEMA 22

Sabendo-se que $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, qual é o maior valor possível de $3x + 4y$?

PROBLEMA 23

Do conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n-1, n\}$ apagam-se 5 inteiros que formam uma progressão aritmética. A soma dos números restantes é 5000.

Determine todos os valores de n para os quais isso é possível e determine as possíveis seqüência dos cinco números apagados.

PROBLEMA 24

Cada quadrado numa faixa 1 x 10 pode ser pintado ou de azul ou de vermelho, mas dois quadrados adjacentes não podem ser pintados de azul.

De quantas maneiras podemos realizar essa pintura?

PROBLEMA 25

Dado sete números reais arbitrários distintos, mostre que existem dois deles, x e y, tais que: $0 < \frac{x-y}{1+xy} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

PROBLEMA 26

Escreve-se no quadro-negro dezessete inteiros positivos distintos, tais que nenhum deles possui um fator primo maior do que 10. Mostre que o produto de algum par desses números é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 27

Numa classe de 25 estudantes as carteiras são arrumadas em 5 filas e 5 colunas. Se um estudante pode se mover de uma carteira para a carteira imediatamente à sua frente, ou para a imediatamente atrás ou para a imediatamente à sua direita ou à sua esquerda, podem todos os 25 estudantes, simultaneamente, se moverem, cada um ocupando uma outra carteira?

PROBLEMA 28

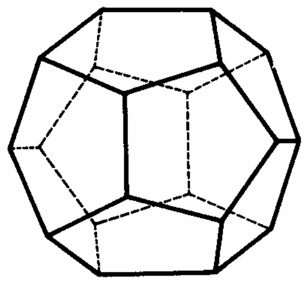
As raízes de dois polinômios do segundo grau são inteiros negativos e eles possuem uma raiz em comum. Podem os valores dos polinômios em algum inteiro positivo ser 19 e 98?

PROBLEMA 29

Prove que: dentre todos os triângulos com um perímetro dado o triângulo eqüilátero possui a maior área.

PROBLEMA 30

Um calendário de mesa consiste de um dodecaedro regular com um mês diferente sobre cada uma de suas doze faces pentagonais. De quantas maneiras, essencialmente distintas, podemos arrumar os meses nas faces do dodecaedro para formar o calendário? *(Se uma arrumação puder ser obtida de outra por uma rotação, as duas* ***não*** *são essencialmente distintas).*



DODECAEDRO

(*) Os problemas foram compilados das provas de diversas olimpíadas de matemática: Olimpíada Brasileira de Matemática, Olimpíada de Maio, Olimpíada de Matemática do Cone Sul, Olimpíada Iberoamericana de Matemática, da Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte, de Olimpíadas Regionais e de listas de problemas de matemática na INTERNET.