LISTA 03 – NÍVEL III

1) Colocam-se 25 pontos na região limitada por um retângulo 6 por 16. Mostre que existem dois desses pontos cuja distância entre eles não é maior do que $2\sqrt{2}$.

2) Um saco contém 13 bolas azuis, 10 vermelhas, 8 verdes e 6 amarelas. As bolas são todas idênticas, a menos da cor. Quantas delas temos de retirar do saco, aleatoriamente, para que tenhamos certeza de que:

a) No mínimo 5 bolas têm a mesma cor?
b) No mínimo 3 são verdes?
c) No mínimo uma de cada cor?

3) Marcam-se 17 pontos no plano, 3 não em linha reta, e cada par deles é ligado por um segmento de reta ou vermelho ou azul ou preto. Prove que existe um triângulo com vértices nesses pontos com os lados de mesma cor.

4) Seja M um conjunto com 10 inteiros positivos, cada um deles menor de que ou igual a 100. Mostre que M possui dois subconjuntos **disjuntos** tais que a soma dos elementos de ambos os conjuntos é soma dos um mesmo número.

5) Marcam-se 101 pontos no plano de tal maneira que, tomados quaisquer três deles, existem dois cuja distância é menor do que 1. Mostre que 51 desses pontos estão na região limitada por um círculo de raio 1.

6) Sejam S e P números positivos. Mostre que um círculo de raio S/P podem ser desenhado na região limitada por todo quadrilátero convexo com perímetro P e área S.

7) Cada quadrado de um tabuleiro 8 x 8 é pintado de branco. A seguir, aplicamos a regra seguinte: podemos escolher qualquer retângulo formado por 3 desses 64 quadrados e pintar cada um dos três da cor oposta, isto é, os brancos são pintados de preto e os pretos são pintados de branco (na

primeira vez que aplicarmos essa regra, é óbvio, os três retângulos serão pintados de preto). Desse modo, é possível pintar inteiramente o bordo do tabuleiro de preto? Justifique.

8) Pintamos de vermelho todas as faces de um bloco de madeira, em forma de um paralelepípedo, de dimensões 40cm de comprimento, 40 cm de largura e 10cm de altura. A seguir, cortamos o bloco em 16 cubinhos de 10 cm de aresta. Quantos desses cubinhos possuem um número par de faces pintadas de vermelho?

9) Contratam-se x trabalhadores durante y dias para construir z casas. Quantos dias levariam q trabalhadores para construir r casas? (Suponha que todos trabalhadores fazem seus serviços com a mesma eficiência).

Resp. $\frac{xyr}{qz}$.

10) Se $x^2 + xy + x = 14$ e $y^2 + xy + y = 28$, encontre os valores possíveis para a soma $x + y$.
Resp. ou 6 ou 7.

11) Um feirante tinha uma cesta de ovos para vender e atendeu sucessivamente três fregueses. Cada freguês levou metade dos ovos existentes na cesta e mais meio ovo. Se o feirante não precisou quebrar nenhum ovo e sobraram 10 ovos na cesta, quantos ovos havia inicialmente?
Resp. 87.

12) Um elevador pode levar 20 adultos ou 24 crianças. Se 15 adultos já estão no elevador, quantas crianças podem ainda entrar?
Resp. 6.

13) Em uma escola vai ser organizado um campeonato de vôlei com a participação de 32 equipes. As equipes vão ser distribuídas em 8 grupos. Em cada grupo, cada equipe joga com todos os outros e a melhor equipe se classifica para a fase seguinte. As equipes classificadas são distribuídas em 2 grupos nos quais o sistema se repete. Finalmente, as primeiras colocadas disputam o final. Ao todo, quantos jogos são disputados?

Resp. 61.

14) Se $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, encontre o valor máximo de $3x + 4y$.

14) Sejam M o conjunto consistindo dos 2000 primeiros números da seqüência:

$$11, 101, 1001, 10001, 100001, ...$$

Mostre que pelo menos 90 % dos elementos de M não são primos.

15) Determine todas as funções $f : R \rightarrow R$ que possuem a propriedade:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y, \text{ para todo } x, y \in \mathbf{R}.$$

16) Seja P um polígono convexo com 1996 lados, tais que quaisquer três diagonais nunca se encontram num mesmo ponto. Prove que a quantidade de triângulos que tem os lados sobre essas diagonais e que estão na região limitada pelo polígono P é um número divisível por 11.

Resp. $\binom{1996}{6}$ é divisível por 11.

17) Uma sacola contém m bolas brancas e n bolas pretas. Duas bolas são retiradas aleatoriamente, sem reposição.

(a) De quantos modos distintos podemos retirar da sacola, sem reposição, duas bolas?

(b) Qual é a probabilidade de serem retiradas duas bola, sendo uma de cada cor?

Resp. a) $\binom{m+n}{2}$ b) $\dfrac{mn}{\binom{m+n}{2}}$