NOTAS DE AULA

CONJUNTOS, FUNÇÕES E RELAÇÕES

CAPÍTULO I

NOÇÕES BÁSICA DE CONJUNTOS

1. Conjuntos

O conceito de conjunto aparece em todos os ramos da matemática. Intuitivamente, um conjunto é qualquer coleção de objetos bem definida. Notamos um conjunto por uma letra maiúscula: A, B, C, X, Y.......... Os objetos que constituem o conjunto são chamados elementos ou membros e serão notados por letras minúsculas: a, b, x, y........ .
A afirmação "a é um elemento de A" ou, a equivalente, "a pertence a A" é escrito como **a** e **A**. A negação de **a** e **A** é escrita como **a** Ï **A**.

Existem duas maneiras de especificar um conjunto particular. Uma maneira, se há essa possibilidade, é listando todos seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

significa o conjunto A cujos elementos são as letras a, e, i, o, e u. Observe que os elementos são separados por vírgulas e estão listados entre chaves { }.
Uma outra maneira é definindo as propriedades que caracterizam os elementos no conjunto. Por exemplo,

$$B = \{ x;\ x \text{ é um inteiro},\ x > 0 \}$$

que se lê "B é o conjunto dos x tais que x é inteiro e x é maior do que zero". Uma letra, comumente x, é usada para denotar um elemento arbitrário do conjunto; os dois pontos é lido como "tal que" e a vírgula como "e". O conjunto B acima também pode ser escrito como

$$B = \{ x \mid x \text{ é um inteiro e } x > 0 \}.$$

.

A barra $|$ significa "tal que".

Exemplos:

1) $A = \{2, 3, 5\}$. Observe que $2 \in A$, $4 \notin A$, $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $\pi \notin A$

Desafio: O conjunto A, acima, é o único conjunto com três inteiros positivos tais que o produto de qualquer dois de seus membros deixa resto um quando dividido pelo terceiro ou existe algum outro?

2) Intervalo aberto de a até b = $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$
3) Intervalo fechado de a até b = $[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$
4) Intervalo aberto-fechado de a até b = $(a, b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$
5) Intervalo fechado-aberto de a até b = $[a, b) = \{ x \mid a \leq x < b \}$

Uma questão:

Quando é que dois conjuntos, A e B, são iguais?

O conjunto A é igual a B se, e somente se, eles têm os mesmos elementos, isto é, cada elemento de A é um elemento de B e, reciprocamente, cada elemento de B pertence a A . Notamos "A igual a B" por $A = B$.

A negação de $A = B$ é escrita como $A \neq B$.

Exemplo 6:
Considere os conjuntos:

$E = \{ x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$
$F = \{ 2,1 \}$
$G = \{ 1, 2, 2, 1 \}$

Aqui temos $E = F = G$
Observe, então, que um conjunto não depende da maneira como seus elementos são dispostos nele e o conjunto é o mesmo se os seus elementos são repetidos ou rearranjados.

Conjuntos podem ser finitos ou infinitos.
Um conjunto é finito se possui n elementos distintos, onde n é um inteiro não negativo; caso contrário, é infinito.
Um conjunto que possui um único elemento é chamado conjunto unitário. A primeira vista, parece estranho que a noção de conjunto aponte para a idéia de coleção, agregado e, no entanto, falamos de conjunto unitário. A noção de

conjunto unitário é bastante útil. Posteriormente, no item 3, página 4, voltaremos para esclarecer melhor esse conceito.

Exemplo 7:
Considere os seguintes conjuntos:

N = { 1, 2, 3, 4,.......}
A = { 1, 3, 5, 7, ...}
B = { x | x é primo e x > 2 }
C = { 3, 6, 9, 12, ...}

Observe que todo elemento de A é elemento de N. Quando isso acontece dizemos que A é um subconjunto de N e denotamos esse fato por **A Ì N** . A negação de $A \subset N$ é escrita como $A \not\subset N$. No presente exemplo, observe que $B \subset A$, $C \subset N$ e $C \not\subset N$. Note também que C é um subconjunto de N, mas não é igual a N. Nesse caso, dizemos que **C é um subconjunto próprio de N**.
Assim, se $A \subset B$, dizemos que A é subconjunto de B ou A é uma parte de B. Se $A \subset B$, mas $A \neq B$, dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B

Exemplo 7:
Denotaremos, de agora por diante,

N = conjunto dos números inteiros positivos = { 1, 2, 3, 4,.....}

Z = conjunto dos números inteiros = {...., -3, -2, 0, 1, 2, 3,...}

Q = conjunto dos números racionais = $\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z \text{ e } n \neq 0 \}$

R = conjunto de todos os números reais.

De acordo com essa definição, temos:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

NOTA: Observe que $A \subset B$ não exclui a possibilidade de $A = B$. De fato, podemos definir a igualdade entre dois conjuntos como:

$$A = B \text{ se, e somente se, } A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Exercício: Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então prove que são verdadeiras as afirmações:

.

(i) $A \subset A$ (reflexividade)

(ii) $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$

(iii) Se $A \subset B$, $B \subset C$, então $A \subset C$ (transitividade)

2. **O Conjunto Universal**

Em qualquer aplicação da teoria dos conjuntos, todos os conjuntos em discussão são subconjuntos de um conjunto fixo. Chamamos este conjunto de **conjunto universal ou universo** e o denotamos por U.

Exemplo 8:
Quando estudamos a geometria plana, o conjunto universo é o conjunto de todos os pontos do plano. Quando estudamos a aritmética dos inteiros o Z é o conjunto universal.

Exemplo 9:
Considere os conjuntos

S = conjunto de todos os quadriláteros
P = conjunto de todos os paralelogramos
R = conjunto de todos os retângulos
L = conjunto de todos losangos
Q = conjunto de todos os quadrados.

Podemos afirmar que $Q \subset L \subset P \subset S$. O que é $P \cap R \cap L \cap Q$?

3. O Conjunto Vazio

A princípio é estranho que o conceito de conjunto aponte para a noção de coleção, agrupamento, ajuntamento e, no entanto, se fale em conjunto unitário, conjunto vazio. Faremos, a seguir, um rápido comentário sobre a questão.
Suponha que temos o seguinte conjunto:

S = {1, 2, 3, 4, 5, } . Observe que se retiramos o elemento 5 de S, obtemos um novo conjunto:

$S_1 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Se desse conjunto, retiramos o elemento 4, obtemos um novo conjunto:

.

$S_2 = \{ 1, 2, 3 \}$.

Se do conjunto S_2 retiramos o elemento 3, obtemos um outro conjunto:

$S_3 = \{ 1, 2 \}$

Observe então que, quando temos um conjunto e retiramos um elemento desse conjunto é natural que obtenha um outro conjunto. Para que essa propriedade seja válida sempre, devemos obter um outro conjunto quando retiramos o elemento 2 do conjunto S_3, isto é, teríamos que considerar como conjunto

$S_4 = \{ 1 \}$ (que é chamado, por ter um único elemento, de **conjunto unitário**).

Desse modo, ao retirarmos o elemento 1 de S_4 obtemos um conjunto sem qualquer elemento:

$S_5 = \{ \ \}$, que chamamos de **conjunto vazio**.

Resumindo, se queremos adotar como verdadeira a propriedade:

> *sempre que tivermos um conjunto e dele retirarmos um elemento, o que resultar desse conjunto é um outro conjunto*

temos de aceitar a existência do conjunto unitário e do conjunto vazio. Com isso, aceitamos essas definições e ganhamos uma propriedade (Princípio da Economia do Pensamento).

Desse modo, as noções de conjunto unitário e conjunto vazio aparecem, e são úteis, apesar do conceito de conjunto ser entendido como coleção de elementos ou agregado de elementos.

Notamos o conjunto vazio por $\{ \ \}$ ou $\emptyset$. Observe que $B = \{ \emptyset \}$ **não** é o conjunto vazio, pois B tem um elemento, que é o $\emptyset$. Nesse caso, B é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio!

Exemplo 10
O conjunto $A = \{ x \in R \mid x^2 = -2 \}$ não possui elemento, pois nenhum número real multiplicado por ele mesmo resulta em numero negativo. Logo, $A = \{ \ \}$.

4. **Conjunto das Partes**

.

No conjunto das retas, cada reta é um conjunto de pontos. No conjunto de planos do espaço tridimensional, cada plano é um conjunto de retas. Ou seja, podemos falar de conjuntos cujos elementos são conjuntos.

Dado um conjunto A, a coleção de todos os subconjuntos de A é chamado de **conjunto das partes de A** e é denotado por **P(A)**; isto e':

$$P(A) = \{ X \mid X \subset A \}$$

Exemplo 11
Se $A = \{ a, b, c \}$ então
$P(A) = \{ A, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{a, c \}, \{b, c\}, \varnothing \}$

Desafio:
Em geral, se A é um conjunto finito com n elementos então P(A) possui 2^n elementos. Prove.

5. **Operações com Conjuntos**

Dados dois conjuntos podemos "operar" esses conjuntos no sentido de obter um outro conjunto. As operações mais comuns entre dois conjuntos são: união, interseção, diferença, complementar, diferença simétrica.

A **união** de dois conjuntos A e B, denotada por **A** È **B**, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou B; isto é,

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

Observe que a disjunção "ou" é usada no sentido "e/ou".

A **interseção** de dois conjuntos A e B, denotada por **A** Ç **B**, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A e B, ou seja, **A** Ç **B** é a coleção dos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B; isto é :

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$$

Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos A e B são **disjuntos**.

A **diferença** de B com respeito a A, ou simplesmente diferença de A e B, denotada por **A - B**, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B, isto é :

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$$

Observe que : A – B e B são disjuntos.

O **complementar** de um conjunto A relativamente ao conjunto universal U, denotado por $\mathbf{A^c}$, é igual a diferença U - A, isto é,

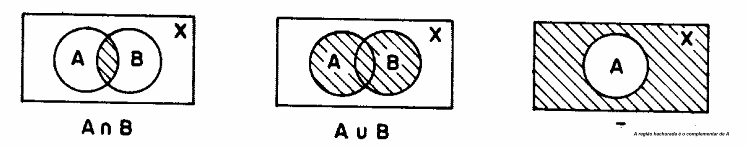
$$A^c = \{ x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \}$$

A **diferença simétrica** de A e B, denotada por **A** D **B**, é a união da diferença de B com respeito a A e de A com respeito a B, isto é:

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$

Os diagramas mostrados a seguir, chamados diagramas de Venn, ilustram as operações definidas acima. Os conjuntos são representados por áreas planas e U, o conjunto universal, pela área do retângulo que envolve os conjuntos.

John Venn (1834-1923) foi um lógico inglês que empregou esses diagramas em 1876 num artigo sobre o sistema lógico de Boole e também em 1894 em seu famoso livro *Symbolic Logic*



A^c

As operações definidos acima satisfazem a várias leis ou identidades que são listadas abaixo:

(i) $A \cup A = A$ (idempotente)
(ii) $A \cap A = A$ (idempotente)
(iii) $(A \cup B) = (B \cup A)$ (comutativa)
(iv) $(A \cap B) = (B \cap A)$ (comutativa)
(v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributividade)
(vi) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributividade)

.

(vii) $A \cup \Phi = A$ (identidade)
(viii) $A \cap \Phi = \Phi$ (identidade)
(ix) $(A^c)^c = A$
(x) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(xi) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(xii) $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta B) \,\Delta\, C$
(xiii) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta (A \cap C)$

Exemplo 12
Mostrar que: $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$

Observe que, da definição dada acima, temos que mostrar dois fatos:

(i) $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap B) \cup (B \cap C)$
e
(ii) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$

Para mostrar o fato (i) temos que verificar que todo elemento de $(A \cup B) \cap C$ é também elemento de $(A \cap B) \cup (B \cap C)$. Para isso, tomemos
$x \in (A \cup B)$ e $x \in C$, ou seja: ($x \in A$ ou $x \in B$) e $x \in C$, ou ainda
($x \in A$ e $X \in C$) ou ($x \in B$ e $x \in C$), e, finalmente, temos
$x \in [\,(A \cap C) \cup (B \cap C)\,]$

Para mostrar o fato (ii), temos de verificar que todo elemento de $[\,(A \cap C) \cup (B \cap C)\,]$ é também elemento de $(A \cup B) \cap C$. Para isso, tomemos $x \in (A \cap C)$ ou $x \in (B \cap C)$, ou seja, ($x \in A$ e $x \in C$) ou ($x \in B$ e $x \in C$) ,que é o mesmo que ($x \in A$ ou $x \in B$) e $x \in C$, isto é, $x \in (A \cup B)$ e $x \in C$, que é o mesmo que $x \in [\,(A \cup B) \cap C\,]$.

A verificação das demais identidades são deixados como exercício.

6. **Aplicações do Conceito de Conjunto**

Para qualquer conjunto finito X, denotamos # X o número de elementos de X.

6.1 (Princípio da Inclusão-Exclusão) Se A e B são conjuntos finitos, então

$$\#(A \cup B) = \# A + \# B - \#(A \cap B)$$

Prova: Inicialmente escrevemos $A \cup B$ e B como a união de dois conjuntos disjuntos:

.

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

É fácil ver que, sendo os conjuntos $A \cup B$ e B escritos como união de conjuntos disjuntos, temos:

$$\#(A \cup B) = \# A + \# (B-A) \quad \text{e}$$
$$\# B = \# (B-A) + \# (A \cap B).$$

Segue, então, que

$$\#(A \cup B) = \# A + \# (B-A) = \# (A) + \# (B) - \# (A \cap B).$$

NOTA: O leitor pode, como exercício, deduzir o Princípio da Inclusão - Exclusão para três conjuntos:

$$\#(A \cup B \cup C) = \# A + \# B + \# C - \# (A \cap B) - \# (A \cap C) - \# (B \cap C) + \# (A \cap B \cap C).$$

6.2 Se 47% das pessoas de uma cidade votaram, numa determinada urna, para prefeito e 75% votaram para senador, qual é o percentual mínimo dos que votaram para prefeito e senador?

Solução:
Sejam P e S o conjunto das pessoas que votaram, naquela urna, para prefeito e senador respectivamente e n o número total de votantes naquela urna.

Então : $\#(P \cup S) \leq n$ e $\#(P \cup S) = \# P + \# S - \#(P \cap S)$

Assim: $n \geq \# P + \# S - \#(P \cap S) = (47 + 75).n / 100 - \#(P \cap S)$

Ou seja, $\#(P \cap S) \geq (47 + 75 - 100).n / 100 = 22.n / 100$, e no mínimo 22% votaram para prefeito e senador.

6.3 X, Y e Z são conjuntos de pessoas dois a dois disjuntos. A média de idade das pessoas nos conjuntos X, Y, Z, $X \cup Y$, $X \cup Z$ e $Y \cup Z$ são dados na tabela abaixo:

Conjunto	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Y$	$Y \cup Z$
Média de idade das pessoas no conjunto	37	23	41	29	39,5	33

.

Ache a média das idades das pessoas no conjunto $X \cup Y \cup Z$

Solução:

Sejam : # X = x, # Y = y e # Z = z. Então
$(X \cup Y)$ = x + y , # $(X \cup Z)$ = x + z e # $(Y \cup Z)$ = y + z
Agora os dados do problema podem ser resumidos em três equações:

$$\frac{37x + 23y}{x + y} = 29$$

$$\frac{37x + 41z}{x + z} = 39{,}5$$

$$\frac{23y + 41z}{y + z} = 33$$

Simplificando essas equações, obtemos:

4x = 3y; 5x = 3z, 5y = 4z

O que buscamos é o valor da fração $F = \dfrac{37x + 23y + 41z}{x + y + z}$

Fazendo as substituições $y = \dfrac{4}{3}x$; $z = \dfrac{5}{3}x$, obtemos F = 34.

4) Diga, justificando, se existe um conjunto S de inteiros positivos tal que um número está em S se, e somente se, ele é a soma de dois elementos distintos de S ou é uma soma de dois inteiros positivos que não estão em S?

Solução:
A resposta é sim.

Considere S = N - { 1, 2, 4, 7, 10 } = { 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13,...}. Cada um dos números 3, 5, 6, 8, 9, 11 e 12 é uma soma de dois números que não estão em S:

3 = 1+ 2 ; 5 = 4 + 1; 6 = 2 + 4; 8 = 7 + 1; 9 = 2 + 7; 11= 4 + 7; 12 = 10+2.

.

Agora, $13 = 8 + 5$, com $8, 5 \in S$ e qualquer número n maior do que 13 tem a forma $n = 3 + (n - 3)$; com $3 \in S$ e $(n - 3) \in S$, para n maior do que 13. Por outro lado, nenhum dos números 1, 2, 4, 7 ou 10 é soma de números que estão em S ou de números que estão em S ou de números que não estão em S. Portanto, o conjunto existe.

É fácil ver que a solução é única, desde que 1 não pode estar em S, 2 não pode estar em S, 3 tem de estar em S, e assim por diante.

5) Escreva uma tabela para o conjunto P(X) com a operação Δ, quando $X = \{ a, b \}$.

Solução: Desde que
$M \,\Delta\, N = (M - N) \cup (N - M)$, tomando $A = \{ a \}$, $B = \{ b \}$ podemos facilmente obter a tabela abaixo.

D	$\varnothing$	A	B	X
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	X
A	A	$\varnothing$	X	B
B	B	X	$\varnothing$	A
X	X	B	A	$\varnothing$

Observe que, com a operação Δ, todo Y elemento de P (X) satisfaz a equação $Y^2 = \varnothing$, onde Y^2 significa $Y \Delta Y$.

EXERCÍCIOS

1) Sejam A, B e subconjuntos de um conjunto X. Sob que condições cada uma das igualdades abaixo é verdadeira ?
   (a) $A \cup B = A \,\Delta\, B \,\Delta\, (A \cap B)$ (b) $A \,\Delta\, (B \cup C) = (A \,\Delta\, B) \cup (A \,\Delta\, C)$
   (c) $A \cup (B \cap A) = A$

2) Prove ou dê um contra - exemplo para as seguintes afirmações:

.

(a) $P(X) \cap P(Y) = P(X \cap Y)$ (b) $P(X) \cup P(Y) = P(X \cup Y)$

3) (Lewis Carrol, "A Tangled Tale")
Olhando prisioneiros que retornavam de uma guerra observou-se que, no mínimo 70 % tinham perdido um olho, 75 % uma orelha, 80 % um braço, 80% uma perna. No mínimo, que percentagem dos prisioneiros tinha perdido todos os órgãos citados?

4) Uma centena de estudantes respondeu um questionário sobre seus hábitos de estudo. 70 deles disseram que algumas vezes estudaram durante o dia, 55 disseram que algumas vezes estudaram a noite, e 45 disseram que algumas vezes estudaram durante os fins de semana. Também 36 estudantes estudaram durante o dia e a noite, 24 durante o dia e nos fins de semana, 17 durante a noite e nos fins de semana, e 3 durante o dia, a noite e em fins de semana. Quantos estudantes não estudaram em qualquer período?

5) Se $\#A = 3$ e $\#B = 5$, quais são as possibilidades para $\#(A \cup B)$?
6) Considere os conjuntos

$$\{ 1 \}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, 13, 14, 15\}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Seja S_n a soma dos elementos do n-ésimo conjunto. Calcule S_{30}.

7) Existem quantos inteiros de 1 até 1 000 000 inclusive que não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeitos?

8) Quantos inteiros de 1 até 10^{30} inclusive não são quadrados perfeitos, cubo per feito nem potências quinta de qualquer inteiro?

9) Seja A um conjunto finito qualquer e B um subconjunto de A. Prove que o número de subconjuntos de A contendo B é o mesmo que o número de subconjuntos de A disjuntos de B.

10) Se p e q são inteiros positivos tais que

$$\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$$

Qual é o menor valor que q pode ter?

11) Qual é o menor quadrado perfeito que termina com os quatro algarismos 9009?

.

12) Sejam a e b dois números naturais inferiores a 1000 tais que $\frac{a}{b} = 0{,}711978\ ......$ Achar a e b.

13) Seja $E = \{1, 2, 3, 4,...., 360,361\}$. Achar o menor inteiro positivo p tal que todo subconjunto de E com p elementos possui três inteiros consecutivos.

16) (Halmos) Um número finito de círculos divide o plano num número finito de regiões, definindo, então, um mapa no qual a fronteira de cada país consiste de um número finito de arcos de círculos. Quantas cores são necessárias para colorir tal mapa?

CAPÍTULO II

FUNÇÕES

1. A Idéia de Função

O canto dos grilos é um som familiar no campo numa noite quente. O ritmo no qual os grilos cantam depende da temperatura: quando está quente eles cricrilam mais do que em qualquer outro tempo. A tabela abaixo mostra como o ritmo e a temperatura estão relacionados.

Temperatura em Graus Farenheit (*)	50	60	70	80	......
Número de Cricrilos em quinze segundos	10	20	30	40	......

(*) A relação entre graus Farenheit, F, e graus Celsius, C, é dada pela equação:
$F = C \times 1{,}8 + 32$

Para cada temperatura desta tabela, existe um correspondente número de cricrilos em quinze segundos. Observe que, para cada temperatura existe um único número correspondente. Um matemático diria que o número de cricrilos em quinze segundos é uma função da temperatura.

.

Uma maneira de representar uma função é com uma tabela, como acima. Uma outra maneira é escrever uma fórmula. Na tabela acima, cada número da segunda linha é o correspondente número da primeira linha menos 40. Se chamamos F a temperatura em graus Fahrenheit e n representa o número de cricrilos em 15 segundos, podemos escrever.

$$n = F - 40 \quad \text{ou} \quad F = n + 40$$

As duas letras nas fórmulas acima são variáveis. Na primeira, n varia de acordo com a variação de F, isto é, n é função de F. na segunda, F varia de acordo com a variação de n, isto é F é função de n.

A fórmula de uma função permite-nos escrever a correspondente tabela. Basta escrever os números que queremos para a primeira linha e substituí-los na fórmula para achar o número correspondente da segunda linha.

Por exemplo, uma fórmula para a temperatura em graus Celsius, C, como uma função do ritmo do canto dos grilos em 15 segundos, n, é

$$C = 0{,}6n + 4$$

Para ver isso, basta observar que $F = C \times 1{,}8+32$. Como:
$F = n + 40$, temos: $C \times 1{,}8 + 32 = n + 40$, ou $C \times 1{,}8 = n + 40 - 32 = n + 8$, ou ainda: $C = 0{,}6n + 4$ (*)

Para escrever a tabela dessa função, escolhemos alguns números n : 0, 10, 20, 30, 40 e substituímos então esses números na fórmula (*) para encontrar os correspondentes números de segunda linha.

Substituindo $n = 0$, obtemos $C = 0{,}6 \times 0 + 4 = 4$
Substituindo $n = 10$, obtemos $C = 0{,}6 \times 10 + 14 = 10$
Substituindo $n = 20$, obtemos $C = 0{,}6 \times 20 + 14 = 16$
Substituindo $n = 30$, obtemos $C = 0{,}6 \times 30 + 4 = 22$
Substituindo $n = 40$, obtemos $C = 0{,}6 \times 40 + 4 = 28$

a tabela é :

Temperatura em graus Celsius	0	10	20	30	40
Número de cricrilos em 15 segundos	4	10	16	22	28

Resumindo,

.

se temos dois conjuntos S e T, por **uma função ou aplicação de S em T**, entendemos uma correspondência (ou regra, ou mecanismo), que associa para cada elemento S **um único elemento** de T. O conjunto S é usualmente chamado de **domínio** da função e o conjunto T é chamado de **contra-domínio**.

2. Notação e Vocabulário

No capítulo anterior, discutimos vários aspectos da teoria dos conjuntos: operações, elementos etc. Neste capítulo olhamos a teoria dos conjuntos sob um outro ponto de vista. Na verdade, cuidamos de aplicações de um conjunto noutro.

Por quê?

Por várias razões, como poderemos ver adiante. É uma noção útil e leva-nos para resultados importantes. Podemos descrever muitas fatos matemáticos como estudo de funções apropriadas. Em outras palavras, o conceito de aplicação (ou função) que começamos a estudar é muito usado e se constitui num dos pontos mais importante da matemática.

A seguir, vamos tratar de alguns conceitos sobre funções. Para facilitar nossa comunicação vamos introduzir alguma notação e vocabulário.

Seja f uma função de um conjunto S para T. Podemos denotar este fato com a notação:

$$f : S \to T$$

Se s é um elemento de S e $t \in T$ é o elemento que está associada pela função f a s, notamos este fato por: t = f(s). Chamamos **t como sendo a imagem de s pela função f**. Algumas vezes dizemos que t é o valor que f assume em s, ou que f leva s em t. Chamamos o conjunto
$\text{Im } f = \{ t \in T \mid \text{existe } s \in S; f(s) = t \}$ de **imagem da função f**.

Exemplo 1:
Seja S o conjunto das pessoas que moram na rua A e seja N o conjunto dos inteiros positivos. Se s é um dos residentes da rua A, definimos f(s) como sendo o número da residência de s na rua A . Portanto, se o Sr. Silva mora na casa de número 25 da rua A, f (Sr. Silva) = 25. Observe que, se Maria é a esposa do Sr. Silva, então f(Maria) = 25.

Exemplo 2:

.

Consideramos o conjunto S das pessoas residentes na rua A e N o conjunto dos inteiros positivos. Suponha que o sistema da identificação da polícia seja perfeito, de modo que cada pessoa tenha sua carteira de identidade com o respectivo número, independente se é homem, mulher, criança. Definimos a função $g : S \to N$ por g(s) = número da carteira de identidade da pessoa s. Observe que, quaisquer duas pessoas distintas, s_1 e s_2, são tais que $g(s_1) \neq g(s_2)$. Observe, então que esta função aqui definida é distinta da função do Exemplo 1, quanto a esse aspecto. Lá, f(Sr. Silva) = f(Maria). Isto é, dois elementos distintos de S podem ter a mesma imagem. Aqui, ocorre que elementos distintos de S têm imagens distintas. Nesse caso, dizemos, então, que g é **injetiva**.

Assim, $h : S \to T$ é **injetiva** sempre que $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2 \Rightarrow h(s_1) \neq h(s_2)$. Ou, equivalentemente, dizemos que h é injetiva se, e somente se,
$s_1, s_2 \in S$: $h(s_1) = h(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$

Exemplo3 :
Sejam N conjunto dos inteiros positivos e T conjuntos dos inteiros positivos ímpares. Definimos $f : N \to T$ por $f(n) = 2n-1$, para cada $n \in N$. Assim,
$f(1) = 2.1-1 = 2-1 = 1$
$f(10) = 2.10-1=20-1=19$
$f(35)=2.35-1=70-1=69$
f define uma função de N em T e observe que, como no Exemplo 2, f distingue os elementos de N. Isto é, se $n \neq m$ então $f(n) \neq f(m)$. Logo, f é injetiva. Por quê? Pois, se $f(n) = f(m)$ então $2n-1 = 2m-1$, o que nos levaria a conclusão de que n = m, que uma contradição com a hipótese.

Vamos mostrar a seguir que a função f do Exemplo 3 possui uma propriedade que nenhuma das funções dos Exemplos 1 ou 2 possui. De fato, seja x qualquer inteiro positivo ímpar; podemos escrever x como sendo $x = 2r - 1$, para algum inteiro positivo r. Agora, $f(r) = 2r - 1 = x$. Isto significa dizer que qualquer elemento de T aparece como imagem de um elemento de N. Esta propriedade de f é muito importante e dizemos que f é uma **função sobre** ou **sobrejetiva**.

Então, uma função $f: S \to T$ é **sobre** se, para qualquer $t \in T$, existe um elemento $s \in S$ tal que $f(s) = t$.

Exemplo 4:
Para qualquer conjunto não vazio podemos definir $i : S \to S$ por $i(s) = s$, para cada $s \in S$. Esta função aplica cada elemento de S sobre ele próprio. A função i é chamada **função identidade**.
Algumas vezes notamos a função identidade $i : S \to S$ por i_S.

.

É fácil ver que a função identidade é injetiva e sobre.

Desafio

Definimos $f : Z \to N$ por:

(i) $f(n) = 1$, se n é inteiro negativo
(ii) $f(0) = 101$
(iii) $f(n) = n$, se n é inteiro positivo.

A função f é injetiva? É sobre?

Pode acontecer que dados dois conjuntos S e T existe uma função $f : S \to T$ tal que f seja injetiva e sobre. Nesse caso, f é chamada uma **função bijetiva** ou uma **bijeção**.

Essa definição sugere uma certa simetria em relação ao fato de ser bijetiva. Isto, é a definição fala de uma função bijetiva de S para T. Mas, nesse caso, também existe uma função bijetiva de T para S e essa função será chamada de a **inversa de f**, sendo usualmente denotada por f^{-1}.

Vamos mostrar, em seguida, que se $f : S \to T$ é bijetiva então existe $g : T \to S$ bijetiva.
De fato, como f é bijetiva, em particular f é sobre. Logo, dado qualquer elemento t de T, existe algum s de S tal que $f(s) = t$. Como f é também injetiva, s é único; isto é, s é o único elemento de S com a propriedade de que $f(s) = t$. Ou seja, não existe ambigüidade, portanto, em levarmos t naquele elemento s tal que $t = f(s)$. Esse elemento s será chamado $g(t)$. Essa regra associa cada elemento de T num único elemento de S, em outras palavras, define uma função $g: T \to S$. Esta função é chamada a inversa de f e é comumente denotada por $\mathbf{f^{-1}}$.

Exemplo 5
Seja $g : Z \to Z$ tal que $g(s) = s - 6$. É fácil ver que g é injetiva e sobre. Qual é a inversa de g? Para responder a questão, considere t um elemento de Z. Sabemos que $g^{-1}(t) = x$, tal que $g(x) = t$. Mas, $g(x) = x - 6 = t$. Portanto, $x = t + 6$. Assim, $g^{-1}(t) = t + 6$, para todo $t \in Z$.

Exemplo 6

.

Na expressão $\frac{x+1}{x-2}$ não podemos atribuir o valor 2 para x, pois teríamos $\frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0}$ que não é qualquer número real (ou complexo). Assim, para que a fórmula $\frac{x+1}{x-2}$ possa representar uma função teríamos de eliminar a possibilidade de x vir a ser 2. Desse modo, $f : R - \{2\} \to R$, tal que $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ é uma função bem definida. Nesse caso, $R - \{2\}$ é o domínio da função e R é o contradomínio.

Uma questão: f é injetiva?

Sim. De fato, para cada $x, y \in R - \{2\}$, com $x \neq y$, a igualdade $f(x) = f(y)$ significa dizer que $\frac{x+1}{x-2} = \frac{y+1}{y-2}$, ou seja, $(x+1).(y-2) = (x-2).(y+1)$, ou ainda $3x = 3y$, que resulta em $x = y$, que é uma contradição. Logo, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ e a função é injetiva.

f é sobre?

Não. Pois não existe $s \in R$ tal que $f(s) = 1$. De fato, se $1 = f(s) = \frac{s+1}{s-2}$, teríamos $3 = 0$, que é uma contradição.

Agora considere $g : R-\{2\} \to R - \{1\}$, tal que $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Pelo que vimos acima, g é injetiva e sobre.

Quem é a inversa de g?

Fazendo $g(x) = \frac{x+1}{x-2} = y$, obtemos $\frac{2y+1}{y-1}$. Portanto, $g^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-1}$

Uma questão: quando podemos dizer que duas funções f e g são iguais?

Duas funções f e g são iguais se $f(x) = g(x)$, para todo x, com f e g definidas de um mesmo conjunto A para um outro conjunto B (B também o mesmo nos dois casos de f e g) e a lei ou fórmula da função tem de produzir os mesmos valores quando x varia no conjunto A. Assim,
$f, g : A \to B$, com $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$.

.

Exemplo 7
Sejam R^+ o conjunto dos números reais positivos e $f : R^+ \to R^+$, tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, para cada $x \in R^+$. É fácil ver que f é injetiva e sobre. Quem é f^{-1} ?
Vamos mostrar um fato surpreendente : $f(x) = f^{-1}(x)$, para cada x de R^+, ou seja, $f = f^{-1}$. De fato, $f^{-1}(x) = s$, tal que $f(s) = x$. Mas, $f(s) = \frac{1}{s} = x$. Logo,

$f^{-1}(x) = s = \frac{1}{x} = f(x)$.

Desafio

Se $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = x$, podemos concluir que f = g ? O que dizer de H(x) = x e $V(x) = x^2/x$?

2. **Funções Compostas**

No estudo de funções tem um caso muito interessante, que vale a pena estudar pela sua oportunidade de generalização e conseqüente utilidade.

Sejam S um conjunto e f, g duas funções definidas de S para S, isto é, $f, g : S \to S$. Se $s \in S$, então $g(s) \in S$ e, como elemento de S, pode ser aplicado pela função f, resultando no elemento $f(g(s)) \in S$. A partir dessa observação, podemos definir a chamada **função composta**, notada por **f o g,** definida como $f \circ g : S \to S$, tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, para cada $x \in S$.

Exemplo 8
Sejam $f, g : R \to R$ tal que $f(s) = 5s + 6$ e $g(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Observe que podemos calcular $(f \circ g)(s) = f(g(s)) = f\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = 5.\frac{1}{s^2+1} + 6 = \frac{6s^2+11}{s^2+1}$.
Evidentemente que poderíamos ter calculado $(g \circ f)(x)$. O que seria $g(f(x))$?
Basta usar a definição: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x + 6) = \frac{1}{(5x+6)^2+1}$.
Para exemplificar,

.

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 5.1 + 6 = 11$ e $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(6) = \frac{1}{6^2+1} = \frac{1}{37}$.
Observe, então, que $f \circ g \neq g \circ f$, isto é a composição de funções "não comuta".

O que estudamos sobre a função composta ou composição de funções pode ser generalizado para o caso em que temos duas funções $f : S \to T$ e $g : T \to W$. Nesse caso, podemos definir a função composta f o g (ou a composição das duas funções) como sendo $g \circ f : S \to W$, tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in S$. Observe que agora não faz sentido falarmos em f o g, a menos que S seja igual a W, pois f está definida de S para T e não de W para T, isto é, como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ e $g(x) \in W$, não podemos achar o valor de f num elemento de W, a menos que W = S.

Seja $f : S \to T$ uma aplicação injetiva de S sobre T. Portanto, como vimos, podemos definir a inversa de f, que é chamada f^{-1} e é uma aplicação de T em S.

Que função resultará de $f^{-1} \circ f$?

Se $s \in S$, então $(f^{-1} \circ f)(s) = f^{-1}(f(s))$. Entretanto, pela definição de f^{-1}, se $t = f(s)$, então $f^{-1}(t) = s$. Em outros palavras, $(f^{-1} \circ f)(s) = f^{-1}(f(s)) = f^{-1}(t) = s$. Ou seja: $(f^{-1} \circ f)(s) = s$, para todo $s \in S$. Isto significa dizer que $(f^{-1} \circ f) = i_S$, que é a aplicação identidade de S sobre ele próprio.

De modo análogo, para cada $t \in T$, $(f \circ f^{-1})(t) = t$. Ou seja, $f \circ f^{-1} = i_T$, que é a identidade de T sobre T.

Essas duas relações, $f \circ f^{-1} = i_T$ e $f^{-1} \circ f = i_S$, facilitam o entendimento de que $f^{-1} : T \to S$ é uma aplicação injetiva e sobre.

De fato, suponha que $f^{-1}(t_1) = f^{-1}(t_2)$, com $t_1, t_2 \in T$. Aplicando f em cada lado da igualdade obtemos: $f(f^{-1}(t_1) = f(f^{-1}(t_2)))$, que é a mesma coisa de :

$(f \circ f^{-1})(t_1) = i_T(t_1) = t_1 = (f \circ f^{-1})(t_2) = i_T(t_2) = t_2$

Portanto, f^{-1} é, de fato, injetiva.

Por que f^{-1} é sobre?

.

Seja $s \in S$, queremos exibir algum elemento $t \in T$ tal que $s = f^{-1}(t)$. Para isso, seja $t = f(s)$, então $f^{-1}(t) = f^{-1}(f(s)) = (f^{-1} \circ f)(s) = i_S(s) = s$. Logo, f^{-1} é sobre.

As aplicações identidades i_s , i_T têm algumas propriedades algébricas importantes, que comentaremos a seguir.
Seja $f : S \to T$ e seja $i_T : T \to T$ a aplicação identidade de T. Pelas definições de f e i_T é possível falar na composta i_T o f.

O que significa i_T o f ?

Se $s \in S$, então $(i_T \text{ o } f)(s) = i_T(f(s)) = f(s)$. Ou seja, $(i_T \text{ o } f)(s) = f(s)$, para todo $s \in S$. Isto significa que $i_T \text{ o } f = f$.
De maneira anóloga, podemos ver que $f \text{ o } i_S = f$.

Agora, se S = T, temos $i_S = i_T = i$. Assim, $i \text{ o } f = f \text{ o } i = f$, onde $i = i_S = i_T$.

Suponha que temos a situação : $g : S \to T$ e $f : T \to W$. Nessas condições, podemos definir : $f \text{ o } g : S \to W$. Duas questões ocorrem naturalmente:

(i) Se f e g são injetiva, f o g é injetiva?
(ii) Se f e g são sobre, f o g e sobre?

A resposta é afirmativa para ambas as questões:
(i) Suponha que as funções $g : S \to T$ e $f : T \to W$ são injetivas. Sejam $s_1, s_2 \in S$ tais que:

$(f \text{ o } g)(s_1) = (f \text{ o } g)(s_2)$. Queremos saber se $s_1 = s_2$.

Para isso, $(f \text{ o } g)(s_1) = (f \text{ o } g)(s_2) \Leftrightarrow f(g(s_1)) = f(g(s_2))$. Como f é injetiva, temos que $g(s_1) = g(s_2)$. Como g é injetiva, $s_1 = s_2$. Logo, f o g é injetiva.

(ii) Suponha que ambos as funções $g : S \to T$ e $f : T \to W$ são sobre. Queremos mostrar que dado $w \in W$, existe $s_o \in S$ tal que $(f \text{ o } g)(s_o) = W$.
Como f é sobre, existe $t_o \in T$ tal que $f(t_o) = W$. Agora, como $g : S \to T$ é sobre, existe $s_o \in S$ tal que $g(s_o) = t_o$. Mas, então: $(f \text{ o } g)(s_o) = f(g(s_o)) = f(t_o) = W$. Portanto, f o g é sobre.

Os dois resultados acima permitem-nos afirmar que:

> Se $g : S \to T$ e $f : T \to W$ são ambas injetiva e sobre então $f \text{ o } g : S \to W$ é injetiva e sobre.

.

EXERCÍCIOS:

1) Sejam a, b números reais quaisquer e $f : R \to R$, tal que $f(x) = x^2 + a.x + b$.

(i) f é injetiva ?
(ii) f é sobre?

2) Sejam S e T dois conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente. Quantas aplicações existem de S para T?

4) Seja $g : R - \{ 0 \} \to R$ tal que $g(x) = \frac{|x|}{x}$

(i) Ache o conjunto imagem de g.
(ii) g é injetiva?
(iii) g é sobre?

5) Seja $h : R \to R$ tal que $h(x) = ||x| - 1|$.
(i) h é uma função?
(ii) h é injetiva?
(iii) h é sobre?
(iv) Esboce no plano cartesiano o gráfico dos pontos (x, f(x)) .

6) Sejam A e B dois conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente. Existem quantas funções $f : A \to B$ sobre?

7) Seja A um conjunto com n elementos. Existem quantas bijeções $f : A \to A$?

8) Sejam $f(x) = x^2 + 3x + 2$ e $S = \{ 0, 1, 2, 3,...., 25 \}$. Em S, existem quantos elementos s tais que f(s) deixa resto zero quando dividido por 6?

6) Seja uma função definida para todo x real, satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} f(3) = 2 \\ f(x+3) = f(x).f(3) \end{cases}$$

Ache o valor de f(-3).

.

7) Dada uma constante C, ache todas as funções f tais que

$$f(x) + C.f(x-2) = (x-1)^3, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

8) Seja $f : N \rightarrow N$ tal que $f(1) = 1$ e $f(n) = n + f(n-1)$, para todo número natural $n \geq 2$. Encontre o valor de $f(1998)$.

9) Seja $f(n)$ a expressão da soma dos n primeiros termos da seqüência:

0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5,5,........, r, r, r+1, r+1, ...

Ache os valores de $f(1997)$ e $f(1998)$.

10) Determine a função $h(x)$ que satisfaz a seguinte equação:

$$x^2.h(x) + h(1-x) = 2x - x^4$$

11) Uma função $f : R \rightarrow R$ satisfaz:

$$f(2 - x) = f(2 + x) \qquad \text{e} \qquad f(7 + x) = f(7 - x)$$

para todo número real x. Se $x = 0$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$, qual é o menor número de raízes da equação $f(x) = 0$ no intervalo $-1000 \leq x \leq 1000$?

CAPÍTULO III

RELAÇÕES

1. INTRODUÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano A x B é o conjunto dos pares (a , b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, i. e.

$A \times B = \{ (a , b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

.

DESAFIO : Se A possui m elementos e B tem n elementos, quantos elementos possui A x B ?

Exemplo 1

Se A = { 3, 4, 6, 18}, então A x A = { (3,3), (3,4), (3,6), (3,18), (4,3), (4,4), (4,6), (4,18), (6,3), (6,4), (6,6), (6,18), (18,3), (18,4), (18,6), (18,18)}

Podemos definir o subconjunto R de A x A como sendo:

R = { (a,b) $\in$ A x A | a divide b}. Nesse caso,

R = { (3,6), (3,18), (6,18), (3,3), (4,4), (6,6), (18,18)}

Logo, R é um subconjunto do produto cartesiano A x A, isto é, R $\subset$ A x A.

Denotamos a R b se o elemento a $\in$ A está relacionado com b $\in$ A pela relação R. No caso acima, R é a relação a divide b.

Exemplo 2

Seja A = { 2, 3, 5, 30, 36, 60} e associemos um elemento a $\in$ A com um elemento b $\in$ A se, e somente se, a e b são primos entre si. Obtemos, assim, um conjunto R de pares ordenados, R $\subset$ A x A, tal que:

R = { (a , b) $\in$ A x A | MDC (a , b) = 1}, ou seja,

R = { (2,3), (2,5), (3,2), (3,5), (5,2), (5,3), (5,36), (36,5)}

Assim, 2R3, 2R5, 3R2, 3R5 etc.

Podemos fazer uma representação gráfica de R, onde a leitura é feita "coluna por coluna":

	2	3	5	30	36	60
2		X	X			
3	X		X			
5	X	X			X	
30						
36			X			
60						

.

Na representação gráfica acima, assinalamos com x o quadrado que se encontra na interseção da "linha a" com a "coluna b" quando MDC (a , b) = 1 (observe que MDC (a , b) = 1 é o mesmo que dizer; a e b são primos entre si).

Os dois exemplos acima apresentam subconjuntos de produtos cartesianos como sendo uma relação (ou correspondência) entre os elementos dos conjuntos.

É interessante observar que nos dois exemplos acima a relação entre os elementos não caracteriza uma função. Por que? Basta ver, por exemplo, que no Exemplo 1 o elemento 3 de A se relaciona com três elementos distintos, a saber: 3, 6 e 18. Já no Exemplo 2, por exemplo, o 5 se relaciona com 2, 3 e com 36.

Os exemplos acima nos sugerem, então, a noção de relação como sendo um conjunto de pares ordenados, ao mesmo tempo que permite concluir que o conceito de relação é distinto do conceito de função, sendo mais geral. Resumindo, se A e B são dois subconjuntos, chamamos de relação de A em B a todo subconjunto do produto cartesiano A x B.

No caso particular em que A = B, todo subconjunto $R \subset A \times A$ é denominado *relação sobre A ou relação em A.*

DESAFIO

Se A = {a, b }, com $a \neq b$, quantas relações existem sobre o conjunto A? E se A = { a, b, c}?

Exemplo 3

Sejam A = { 0,1} e F = { 2, 3, 4}. Existem quantas relações de A em B?

Uma relação R de A em B é um subconjunto do produto cartesiano A x B. Logo, existem tantas relações de A em B quantos são os subconjuntos de A x B. Ou seja, existem 2^6 relações.

DESAFIO

Determine todas as relações sobre A = {0, 1, 2} que satisfazem as seguintes condições:

$a, b \in A$:

(a) a Ra, para toda $a \in A$

(b) Se a Rb, então bRa

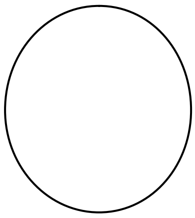
.

Exemplo 4

Seja R o conjunto dos números reais. Definimos a relação

$S^1 = \{ (x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$

É usual representarmos S^1 pelo conjunto de pontos do plano cartesiano R x R que será, exatamente, o círculo de raio 1 com centro na origem:



Se R é uma relação de A em B é usual destacar os seguintes subconjuntos: o domínio de R, notado por D (R), e a imagem de R, notado por Im (R), o gráfico de R, denotado por G_R . Isto é:

$D (R) = \{ x \in A \mid \text{existe } y \in B, \text{ tal que } (x,y) \in R\}$

$Im (R) = \{ y \in B \mid \text{existe } x \in A, \text{ tal que } (x,y) \in R\}$

$G_R = \{ (x , y) \in A \times B \mid x R y \}$

Desse modo, os conjuntos A e B serão chamados, respectivamente, *conjunto de partida e conjunto de chegada da relação R.*

Podemos observar que uma relação é um subconjunto de um produto cartesiano e que toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função. Somente as relações onde os elementos do conjunto de partida se relacionam com um, e só um, elemento do conjunto de chegada são funções.

DESAFIO

Sejam R e S duas relações no conjunto dos números reais e considere seus gráficos G_R e G_S no plano cartesiano.

(a) Quais são os gráficos de $R \cap S$ e $R \cup S$?
(b) Supondo que R e S são definidas por:

$$x R y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad \text{e} \quad x S y \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

quais são os gráficos de $R \cap S$ e de $R \cup S$?

.

É possível determinar uma equação para $R \cup S$?

2. **RELAÇÕES REFLEXIVAS, SIMÉTRICAS E TRANSITIVAS**

Sejam A um conjunto e R uma relação em A .
Se para todo $x \in A$, tem-se $x \, R \, x$, dizemos que a relação R *é reflexiva*.

Exemplo 5
Sejam R o conjunto dos números reais e S a relação em R definida por
$$x \, S \, y \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

Observe que: $-2S2$, $-3S3$ e de uma maneira geral $-x \, S \, x$ qualquer que seja x de A . Logo S é reflexiva.

Exemplo 6
Seja A o conjunto dos números reais e E uma relação em A definida por:

$$x \, E \, y \Leftrightarrow x - y = 5$$

Observe que, $6 \, E \, 1$, $8 \, E \, 3$ etc. mas x não está relacionado com x, já que $x - x = 0 \neq 5$. Logo, a relação E **não** é reflexiva.

Se para quaisquer que sejam $x, y \in A$, tem-se :

$$x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$$

dizemos que a relação R é *simétrica*.

Exemplo 7
Seja A o conjunto de retas do plano. É fácil ver que a relação de paralelismo em A é reflexiva e simétrica.

Exemplo 8
Seja A o conjunto de retas do plano. A relação de perpendicularidade em A é simétrica e não é reflexiva.

Se para quaisquer que sejam $x, y, z \in A$, tem-se:

.

$$x\,R\,y \;\text{ e }\; y\,R\,z \;\Rightarrow\; x\,Rz,$$

dizemos que a relação R é *transitiva*.

Exemplo 9
A relação de ordem habitual em N (Z, Q ou R) é reflexiva e transitiva, mas não é simétrica.

Exemplo 10
A relação de divisibilidade em N (ou Z) é reflexiva e transitiva, mas não simétrica.

Exemplo 11
Sejam A um conjunto não vazio e P(A) a coleção dos subconjuntos de A. É fácil ver que a relação de inclusão em P (A) é reflexiva e transitiva. Em que condições é simétrica?

DESAFIO
Sejam S uma relação sobre o conjunto dos números reais R e G_S seu gráfico no plano cartesiano. O que significa, para o gráfico G_S, o fato de S ser simétrica?

Exemplo 12
Seja A = { 1, 2, 3, ..., n}. Podemos verificar que o número de relações reflexivas sobre A é $2^{n\{n-1)}$.

Exemplo 9
Seja A = { 1,2, 3,....,4}. Podemos verificar que o número de relações reflexivas e simétricas é $2^{n(n-1)/2}$.

3. RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Vimos na seção anterior que existem relações simétricas que não são reflexivas, relações reflexivas que não são simétricas etc.

As relações que são simultaneamente reflexivas, simétricas e transitivas são chamadas *relações de equivalência.*

Exemplo 10

.

Se A o conjunto de retas do plano. O paralelismo sobre A é uma relação de equivalência.

Exemplo 11
Seja $A = \{ x \in Z \mid |x| \leq 10 \}$ e consideremos a relação R sobre A definida por:

$$aRb \Leftrightarrow a^2 + 2a = b^2 + 2b$$

É fácil ver que R é uma relação de equivalência. De fato,

(i) aRa , pois $a^2 + 2a = a^2 + 2a$, para todo ª
(ii) $aRb \Leftrightarrow a^2 + 2a = b^2 + 2b \Leftrightarrow b^2 + 2b = a^2 + 2a \Leftrightarrow bRa$
(iii) aRb e bRc $\Leftrightarrow a^2 + 2a = b^2 + 2b$ e $b + 2b = c^2 + 2c \Rightarrow a^2 + 2a = c^2 + 2c \Leftrightarrow$ aRc

Exemplo 12 Congruência Módulo n (Gauss).

Seja m um inteiro positivo e $a, b \in Z$. Em Z, definimos a relação “a é congruente a b módulo m” se, e somente se, existe um inteiro q tal que $a - b = qm$
Carl Friedrich Gauss (1777-1855) criou uma notação para expressar : “a é congruente a b módulo m” como sendo: $a \equiv b \pmod m$.

Assim, $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a - b = q.m$, para algum inteiro q.

É fácil ver que a congruência módulo m é uma relação de equivalência sobre Z. De fato,

(i) $a - a = 0 = 0.m \Leftrightarrow a \equiv a \pmod m$
(ii) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a - b = qm \Rightarrow b - a = (-q)\,m \Rightarrow b \equiv a \pmod m$
(iii) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a - b = q_1.m$, com $q_1 \in Z$
$b \equiv c \pmod m \Rightarrow b - c = q_2.m$; com $q_2 \in Z$

Como $a - c = (a - b) + (b - c) = q_1m + q_2m = (q_1 + q_2)\,m \Rightarrow a \equiv c \pmod m$

4. CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A .

.

Para todo a $\in$ A , o subconjunto $\overline{a}$ = { x $\in$ A ; x R a } é denominado *classe de equivalência módulo R determinado pelo elemento a Î A* . Neste caso, diz-se que a é um representante de $\overline{a}$.

Chamamos atenção para o fato de que a classe de equivalência $\overline{a}$ depende, evidentemente, da relação de equivalência R.

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A e sejam a e b dois elementos quaisquer de $\overline{a}$. As seguintes condições são equivalentes:

(a) aRb
(b) a $\in \overline{b}$
(c) b $\in \overline{a}$
(d) $\overline{a} = \overline{b}$

Para ver isso, basta mostrar: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).
De fato,

(a) $\Rightarrow$ (b) Basta utilizar a definição de $\overline{b}$.
(b) $\Rightarrow$ (c) a $\in \overline{b} \Rightarrow$ aRb $\Rightarrow$ bRa $\Rightarrow$ b $\in \overline{a}$
(c) $\Rightarrow$ (d) Para todo x $\in$ A, x $\in$ a $\Leftrightarrow$ xRa $\Leftrightarrow$ xRb $\Leftrightarrow$ x $\in$ b .
(d) $\Rightarrow$ (a) Como a Ra temos que a $\in \overline{a}$. Logo, de acordo com (d), a $\in \overline{b}$ e então a R b.

Concluímos então que:

(i) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow$ aRb
(ii) $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \phi \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$. Isto é, se duas classes de equivalência possuem um elemento em comum, então elas coincidem, ou sob outra forma, duas classes de equivalência distintas são disjuntas:

$\overline{a} \neq \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \phi$

A propriedade (ii) nos mostra que se x $\in$ a, então $\overline{x} = \overline{a}$, isto é, todo elemento de uma classe de equivalência é um representante desta classe.

5. **CONJUNTO QUOCIENTE**

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência módulo R é denominado *conjunto quociente de A pela relação de equivalência R* e será indicado por A / R (leia-se : A sobre R).

.

Exemplo 13

No exemplo 11, onde a relação de equivalência era: $aRb \Leftrightarrow a^2 + 2a = b^2 + 2b$, se $a \neq b$ teremos : $b^2 - a^2 = -2(b - a)$, ou seja $(b - a)(b + a) = -2(b - a)$, ou $b + a = -2$ ou ainda $b = -a - 2$

Portanto, as classes de equivalência são:

$\overline{0} = \{0\}$, $\overline{1} = \{+1, -3\}$, $\overline{2} = \{2, -4\}$, $\overline{3} = \{3, -5\}$, $\overline{4} = \{4, -6\}$, $\overline{5} = \{+5, -7\}$, $\overline{6} = \{6, -8\}$, $\overline{7} = \{7, -9\}$, $\overline{8} = \{8, -10\}$, $\overline{9} = \{9\}$, $\overline{10} = \{10\}$

Assim, $A/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}\}$

Observemos que todo elemento de A/R é um subconjunto de A, logo $A/R \subset A$. Além disso, como $a \in \ddot{a}$, para todo $a \in A$, resulta que a união de todas as classes de equivalência módulo R é o conjunto ª

Observação:
Convém destacar as propriedades:

1. Toda classe de equivalência é não vazia.
2. Duas classes de equivalência distintas são disjuntas, isto é, $a \neq b \Rightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \phi$
3. A união de todas as classes de equivalência é o conjunto A.

Resumimos as propriedades acima dizendo, simplesmente, que o conjunto quociente A/R é uma partição de A .

Exemplo 14

Sejam n um inteiro maior do que 1 e a e b dois inteiros quaisquer. São equivalentes as duas afirmações abaixo:

(a) $a \equiv b \pmod{n}$
(b) a e b deixam o mesmo resto quando divididos por n

Podemos mostrar a equivalência demonstrando que

(a) $\Rightarrow$ (b) e (b) $\Rightarrow$ (a).

De fato,
(a) $\Rightarrow$ (b) $a \equiv b \pmod{n}$ significa que $a - b$ é múltiplo de n. Se, quando divididos por n, a e b deixam restos r e s, respectivamente,

.

escrevemos: $a = n.q + r$ e $b = n.k + s$, onde q, k, r, s são inteiros e $0 \le r < n$ e $0 \le s < n$. Assim, considerando $r \ge s$, $a - b = n.(q - k) + (r - s)$ = múltiplo de n. O que implica $(r - s)$ é múltiplo de n. Mas, como $n > r \ge r - s \ge 0$, temos, obrigatoriamente, $r = s$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se $a = n.q + r$ e $b = n.k + r$, temos que $a - b$ é múltiplo de n. Logo, $a \equiv b \pmod{n}$.

Uma questão: Na relação de equivalência sobre Z congruência módulo n, quem é o conjunto quociente?

Os possíveis restos na divisão por n são: 0, 1, 2, 3, ..., n -2, n -1. Logo, vão existir n classes de equivalência. Cada classe $\bar{i}$, com $0 \le i < n$, vai corresponder ao conjunto dos inteiros que deixam resto i quando divididos por n, isto é, $\bar{i} = \{ n.q + i;$ q é um inteiro$\}$. Esse conjunto quociente é, usualmente, denotado por Z_n. Assim,

$$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, ..., \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$$

DESAFIO
Descreva o conjunto quociente na relação *congruência módulo 5.*

EXERCÍCIOS

1) Marque (V) ou (F) conforme a afirmativa seja verdadeira ou falsa:

(a) ( ) A relação S sobre o conjunto das funções contínuas de R em R tal que

$f \, S \, g \Leftrightarrow f(3) = g(3)$

(b) ( ) A inclusão é uma relação de equivalência sobre o conjunto das partes P(A).

(c) ( ) A relação ~ sobre N x N, definida por $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ é uma relação de equivalência.

.

(d) ( ) Toda função é uma relação

(e) ( ) Toda relação é uma função.

2) Seja f : R $\rightarrow$ [0, 1] tal que f (x) - sem x. Defina a relação S por xSy $\Leftrightarrow$ Sen x = Seny, para cada x, y $\in$ R.
(a) Mostre que S é uma relação de equivalência
(b) Descreva o conjunto quociente R / S

3) Sejam f (x), g(x) polinômios com coeficientes reais. Defina a relação S sobre o conjunto R [x] dos polinômios com coeficientes reais por f (x)S g(x) $\Leftrightarrow$ f^1 (x) = g^1 (x) (onde f^1 (x) denota a derivada de f com relação a x)

(i) S é uma relação de equivalência?
(ii) Caso a sua resposta para o item (a) for sim, descreva o conjunto quociente R[x] / S.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERZSENYI,G.; MAUER, S. B. - The Contest Problem Book V, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, № 38, Washington. 1997

[2] GILBERT, W - Modern Algebra with Applications, John Wiley & Sons, New York. 1976

[3] JACOBS, HAROLD R. – Mathematics, a human endeavor. W. H. Freeman and Company. 1982

[4] HERSTEIN, I. N.; KAPLANSKY, I. - Matters Mathematical, Chelsea Publishing Company., New York, N. Y. 1978

[5] MONTEIRO, L. H. J. - Iniciação às Estruturas Algébricas, Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM, Série Professor № 06, São Paulo. 1968