Uma Bela demonstração (sem palavras) da fórmula de Heron

Carlos A. Gomes
Natal / RN

A conhecida fórmula de Heron $S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, para o cálculo da medida da área , S , de um triângulo cujos lados medem a, b e c e semiperímetro p=(a+b+c)/2, pode ser provada de diversas maneiras. O propósito deste pequeno artigo é exibir uma bela demonstração dessa fórmula que foi publicada no ***THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, vol 32, N°4, september 2001 (Heron´s formula via proofs without words).*** de autoria de ***Roger B. Nelsen, Lewis & Clark College, Portland, OR.***

Seja ΔABC um triângulo com lados medindo a, b e c conforme ilustramos na figura 1 (a) abaixo. Nesta figura também representamos as bissetrizes dos ângulos internos do ΔABC assim como a sua circunferência inscrita. Na figura 1(b) mostramos os raios , de medida r, nos pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do ΔABC . Observe!

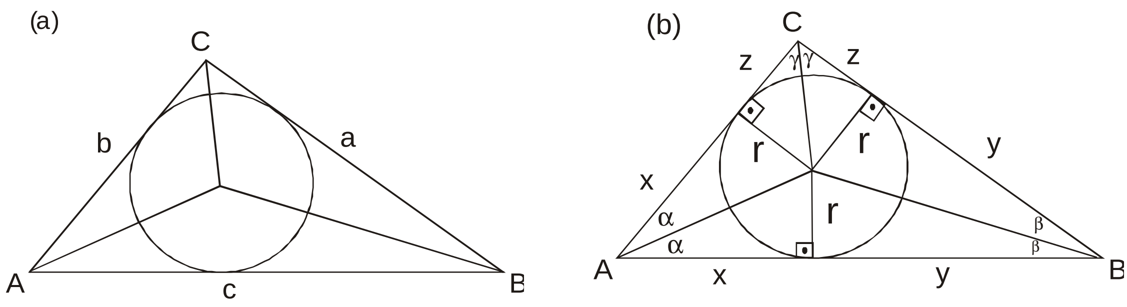

Figura 1

Perceba que o semiperímetro do ΔABC satisfaz as seguintes relações:

$$p = x+y+z = x+a = y+b = z+c$$

Agora vamos mostrar dois lemas (sem palavras) dos quais segue-se de modo imediato a fórmula de Heron.

Lema 1. A medida da área S de um triângulo é igual ao produto da medida do raio da sua circunferência inscrita pela medida do seu semiperímetro.

Prova.

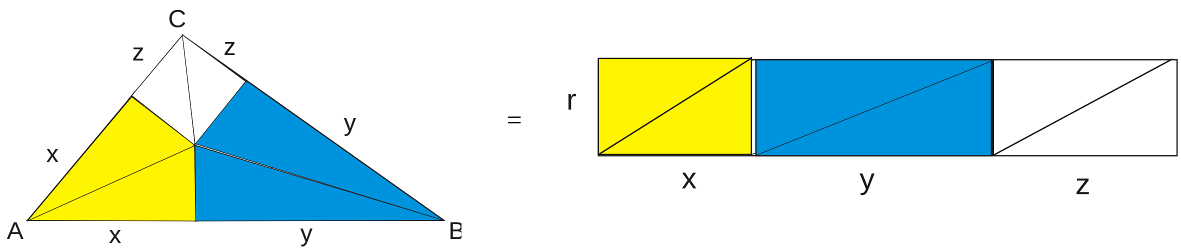

Figura 2.

Observando a figura acima não é dificil perceber que S= r.(x+y+z) = p.r

Lema 2. Se α , β e γ são medidas positivas de três ângulos tais que α+β+γ = π/2, então temos

$$\tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1$$

Prova.

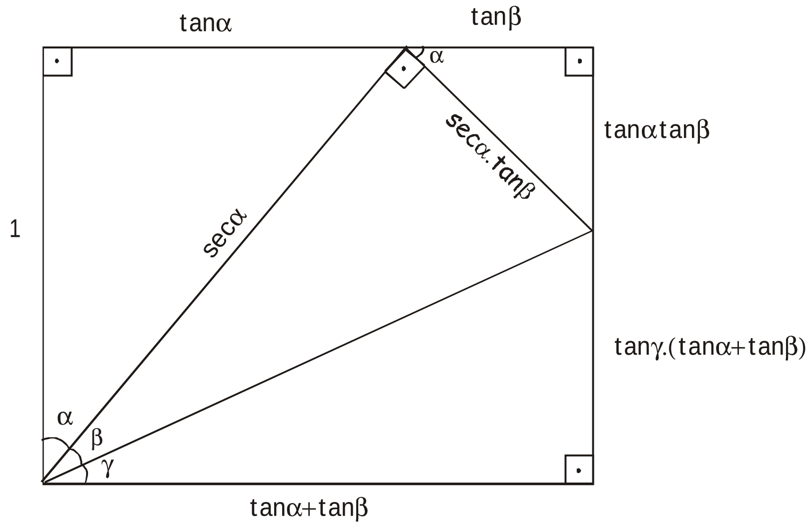

Figura 3. $\tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1$

Teorema 1. (Fórmula de Heron). A medida da área de um triângulo com lados medindo a, b e c é dada por $S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, onde p=(a+b+c)/2.

Prova.

Aplicando o lema 2 aos ângulos cujas medidas são α, β e γ que estão representados no triângulo da figura 1 (b) temos que :

$$\tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1$$

$$\frac{r}{x}.\frac{r}{y} + \frac{r}{y}.\frac{r}{z} + \frac{r}{z}.\frac{r}{x} = 1$$

$$\frac{r^2.(x+y+z)}{x.y.z} = \frac{r^2.p}{x.y.z} = \frac{S^2}{p.x.y.z} = 1$$

assim, de acordo com a última observação abaixo da figura 1, podemos afirmar que $x = p-a, y = p-b\, e\, z = p-c$ o que conjuntamente com a expressão $\frac{S^2}{p.x.y.z} = 1$ implica que $S = \sqrt{p.x.y.z} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$ o que completa a prova.