IX SEMANA DE MATEMÁTICA DA UFRN

De

20/10 a 24/10/97

MINI - CURSO: PROBLEMAS JOGOS E QUEBRA - CABEÇAS

Prof. Benedito Tadeu V. Freire

IX SEMANA DE MATEMÁTICA DA UFRN

DE 20 A 24 DE OUTUBRO DE 1997

MINICURSO:

PROBLEMAS, JOGOS E QUEBRA-CABEÇAS

NOTAS DE AULA

Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire
Programa Especial de Treinamento – PET/CAPES

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Estas são as Notas de Aula do Mini-Curso “Problemas, Jogos e Quebra-Cabeças” da **IX Semana de Matemática da UFRN - 1997**. Nossa intenção é que essas notas facilitem o entendimento dos problemas e das discussões, bem como, *a posteriori*, sejam instrumento de orientação para professores, que querem tornar suas aulas mais atrativas e motivadoras, e aos estudantes que querem melhorar seu desempenho na resolução de problemas.

O material aqui contido foi compilado da bibliografia exposta no final e que aconselhamos a leitura para todo aquele que deseja percorrer o caminho criativo da matemática. Também contém problemas de Olimpíadas de Matemática.

Nessas notas, após alguns exemplos, apresentamos problemas (que, no texto, são chamados de *desafios),* relacionados com os imediatamente estudados acima, e que deixamos as soluções para o leitor, como uma oportunidade para que exerça sua criatividade e exercite suas estratégias de pensamento.

Temos o entendimento de que os jogos têm um imenso valor educativo. Achamos que nós, professores de matemática, deveríamos usá-los mais em sala de aula para motivar os estudantes, tornar as aulas mais atraentes, permitindo aos jovens o exercício da criatividade e da disputa sadia. Por isso, apresentamos nos exemplos alguns jogos, que além do mero caráter de passatempo, exercem o papel de motivador para o aprendizado da matemática e permitem o exercício da criatividade e da lógica do pensamento.

Expressamos nossos agradecimentos ao colega, do Departamento de Matemática, José Querginaldo Bezerra e ao estudante Ary Vasconcelos Medino, bolsista do Programa PET/CAPES, pelas sugestões apresentadas e que resultaram em aperfeiçoamento do texto.

Natal, setembro de 1997

Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire
E-Mail: benedito@digi.com.br ou bene@ccet.ufrn.br
Endereço: Caixa Postal 1214
CEP 59075-970

Natal RN

2. INTRODUÇÃO

Algumas questões estão presentes no nosso dia-a-dia: Qual é o menor caminho para se ir de um determinado lugar para outro? Qual é a melhor maneira de administrar nosso orçamento? Como podemos tornar determinado trabalho mais fácil ou menos complicado? Essas e outras perguntas que fazemos constantemente a nós mesmos traduzem alguns problemas que enfrentamos no nosso quotidiano. Uma questão é pertinente:

Que atitudes devemos tomar para facilitar a resolução de um problema?

Nosso referencial básico para a questão é o livro "A Arte de Resolver Problema" de G. Polya , Editora Interciência, (em inglês "How to Solve It", Princeton University Press, New Jersey, 1973).
Nessas notas, pretendemos responder a questão chamando a atenção para a metodologia do pensamento analítico e ensinando os princípios básicos da resolução de problemas. Vamos fazer isso trabalhando problemas de matemática, jogos e recreações. Parte do nosso esforço consistirá em exercitar a transformação de argumentos verbais em dados analíticos. Uma outra tarefa será a de descrever diversos métodos de resolução de problemas, exemplificando com uma coleção de técnicas de solução e fornecendo ao leitor uma variedade ampla de exemplos. Com isso, esperamos dar ao professor de matemática do 1º e/ou 2º Graus uma coleção de problemas para ilustrar suas aulas e ao estudante uma coleção de problemas e raciocínios que possam servir para ampliar seu conhecimento nas técnicas de resolução de problemas.

3. ESTRATÉGIAS GERAIS DE PENSAMENTO

3.1 ANTES DE FAZER, TENTE ENTENDER!

Quando nos propuserem um caso, um jogo, um problema, um quebra-cabeças, devemos inicialmente, assegurarmos que entendemos a fundo as regras do jogo, os dados do problema e o possível lugar que tem cada um deles e como se encaixam uns com os outros. É imprescindível conhecermos os dados do problema e, exatamente, o que o problema pede. A nossa resolução consiste em ligar os dados do problema ao que nele se pede.

3.2 A BUSCA DAS ESTRATÉGIAS

Esta fase do processo de resolução do problema é aquela em que deve nascer da nossa cabeça muitas idéias, mesmo que possam parecer totalmente inóquas. As vezes, as idéias em que menos apostamos podem nos revelar as mais apropriadas. Uma das técnicas de criatividade, chamada tempestade de idéias (em inglês *brainstorming*), nos revela que a quantidade gera a qualidade. Por isso, anote todas as suas idéias.

3.2.1 ***Procuremos semelhanças com outros problemas***. Como não há nada de novo debaixo do céu, é conveniente procurar semelhanças do jogo (ou problema) com outros que já conheçemos. Perguntemos a nós mesmos: o que é que esse problema nos faz lembrar?

3.2.2 ***Começar pelo fácil torna fácil o difícil***. Talvez o problema seja complicado porque há muitos elementos. Tentemos tornar o problema mais fácil. Construamos um, menos complicado, com menos dados. Talvez essa situação venha a nos revelar algo que facilite o mais complexo.

3.2.4 Experimentemos, procuremos algo que seja invariante. Muita matemática foi feita por tentativa, errando, corrigindo, aperfeiçoando, avançando.

3.2.5 ***Façamos um desenho e, dependendo da situação, pintemos às cores***. Muitos de nós pensam melhor com um desenho, esquema, imagem do que com palavras. Diz o ditado popular: uma imagem vale mais do que mil palavras. Logo, façamos um esquema auxiliar, um desenho, pintemos às cores. Essas atitudes, quase sempre nos revelam caminhos surpreendentemente elegantes e fáceis.

3.2.6 ***Modifiquemos o enunciado, para ver se nos ocorre um caminho possível***. Quando o problema nos parecer por demais difícil, modifiquemos o enunciado, transformemos o problema em outro, isto pode nos levar a um caminho que nos mostre a saída.

3.2.7 ***Explore a simetria***. Muitos jogos e problemas são resolvidos quando exploramos a simetria que o problema apresenta, de forma explícita ou mesmo “mascarada”.

3.2.8 ***Redução ao Absurdo***. Um raciocínio muito empregado é aquele que se chama comumente de método por redução ao absurdo ou método indireto. Como é que funciona? Se pretendemos mostrar que uma situação se comporta da forma A, começamos supondo que não se comporta assim. Fazemos deduções e raciocinando corretamente, nossa cadeia de raciocínio nos levará à conclusão de que no nosso ponto de partida a situação não se comporta da forma A, o que é uma contradição. Assim, a situação inicial tem de ser da forma A.

3.2.9 ***Suponha o problema resolvido.*** Uma tática especialmente utilizada em jogos e problemas em que tenhamos de construir alguma figura é supor o problema resolvido. Quando imaginamos o problema resolvido, construindo de forma aproximada como a coisa deve funcionar, temos a oportunidade de explorar as relações entre os elementos dados e os que procuramos e, assim, ao aproximá-lo podemos ter à idéia que nos faça ver como devemos proceder a partir dos dados.

Existem muitas outras estratégias, verdadeiras jóias do pensamento humano, algumas incrivelmente simples e, ao mesmo tempo, de um vasto poder para resolver problemas. Algumas dessas preciosidades, como, por exemplo, o Princípio da Casa dos Pombos, veremos nas seções seguintes.

3.3 EXPLORANDO A NOSSA ESTRATÉGIA

Se já temos algumas estratégias possíveis para atacar nosso problema, a tarefa a seguir é meditar sobre as nossas idéias e deixar que o nosso subconsciente trabalhe, a seu gosto, esse amontoado de idéias que preparamos para ele. É aconselhável que façamos uma lista das melhores idéias, sem misturá-las a princípio. Exploremos cada idéia da lista com decisão e confiança, de forma ordenada, em paz, sem precipitações.

Se, ao colocarmos em prática uma idéia, nos ocorrer outra, totalmente desligada da primeira e que avaliamos que pode nos ajudar, não vamos desprezá-la. Coloquemo-la na nossa lista. Mas também não desviemos nossa atenção da que agora estamos explorando.

Um ponto importante que deve sempre ser lembrado: ***não podemos desistir facilmente***. Por outro lado, não devemos teimar demais só com uma idéia. Se as coisas complicarem demais, haverá provavelmente outro caminho. Um caminho que foi muito usado na história de matemática foi o da tentativa e erro, tentativa e erro, tentativa e erro, precisamos não esquecê-lo.

Ao concluir nossa resolução, devemos ter certeza disso. Olhemos nossa solução com cuidado. Uma verdade: ***as meias idéias e as meias soluções de pouco servem!*** É preciso certificar de que, realmente, chegamos à solução.

Se conseguirmos resolver o problema, ótimo. Se trabalhamos horas a fio e não conseguimos ver a solução? Muitas vezes aprendemos muito mais, e mais profundamente, com os problemas que tentamos com interesse e persistência ...... e não conseguimos resolver, do que com os que se resolve à primeira vista.

Um conselho deve ser lembrado: ***é mais importante a qualidade do que a quantidade***. Não se apresse. Ao concluirmos a solução de um problema, é preciso que reflitamos um pouco sobre o processo, para que tenhamos uma idéia das dificuldades, dos becos sem saídas em que nos metemos e, principalmente, como devemos proceder no futuro para resolver melhor outros problemas e jogos, parecidos ou não.

Uma reflexão sobe o nosso próprio processo de pensamento é interessante na medida em que podemos tirar bons proveitos para o futuro. Cada um tem seu próprio estilo de conhecimento. Visual ou analítico? Depende muito da expressão verbal ou da forma escrita? Temos tendência para o compromisso com idéia única, sem flexibilidade? Temos tendência a pensar em círculo obsessivamente? Como poderíamos fomentar o fluxo de idéias novas, variadas, originais? Reflexões como essas ajudam a saber que tipo de problemas podemos nos ocupar com sucesso e em quais nossa probabilidade de êxito não é tão grande.

4. EXEMPLOS DE PROBLEMAS, JOGOS E QUEBRA-CABEÇAS.

EXEMPLO 1

Dois amigos se divertem com o seguinte jogo. O primeiro jogador seleciona qualquer inteiro de 1 a 11 inclusive e diz ao segundo jogador, que soma esse número à qualquer número de 1 a 11 inclusive, falando o resultado ao primeiro jogador que o soma à qualquer número escolhido de 1 a 11, e assim eles vão jogando, alternadamente, até que um deles obtenha o número 56, vencendo o jogo. Qual é a estratégia para vencer?

DESAFIO 1

Imagine o jogo do Exemplo 1 com a condição: O que obtiver 56 perde o jogo. Qual é a estratégia para vencer?

DESAFIO 2

Qual a estratégia para vencer o jogo do Exemplo 1 se você altera para somar sempre um inteiro de 1 a 9 inclusive?

DESAFIO 3

No jogo do Exemplo 1, que intervalo você teria para escolher um número para o lugar de 56 de modo que o segundo jogador pudesse ganhar?

DESAFIO 4

Imagine que o jogo do Exemplo 1 fosse alterado para que cada jogador pudesse escolher um inteiro qualquer entre 1 e 55 inclusive. O segundo jogador soma qualquer inteiro positivo que não exceder a 2 vezes o inteiro escolhido pelo primeiro. Eles continuam jogando alternadamente, cada um somando um inteiro positivo que não exceder ao dobro do usado pelo seu antecessor. O jogador que obtiver 56 seria o campeão. Que jogador teria a vantagem?

EXEMPLO 2

Prove que o número de pessoas presentes no teatro e que apertaram a mão de um número ímpar de pessoas é um número par.

EXEMPLO 3

Considere um tabuleiro de xadrez 8x8 e 32 dominós de dimensão 2x1. Obrigatoriamente os dominós podem ser arranjados sobre o tabuleiro de modo a cobri-lo inteiramente. Agora, dois quadrados situados nos cantos do tabuleiro são retirados, veja Figura 2 abaixo.

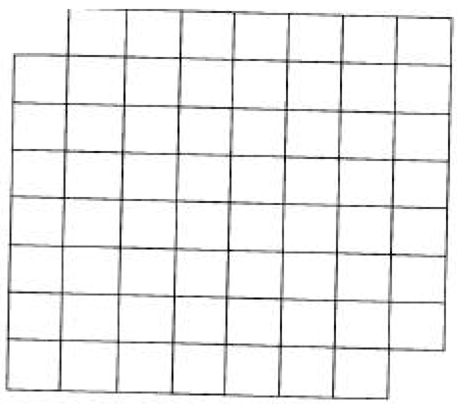


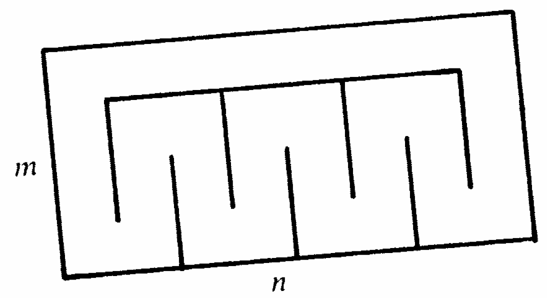
Figure 19

Diga, justificando, se 31 dominós cobrem completamente o tabuleiro reduzido.

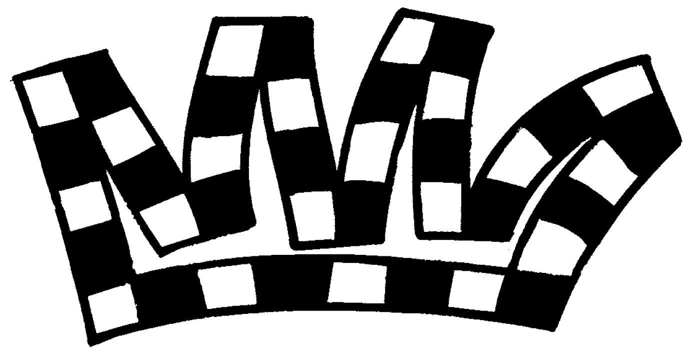
DESAFIO 5

Se no Exemplo 3 retirássemos 1 quadrado branco e 1 quadrado preto, o tabuleiro reduzido poderá sempre ser coberto com exatamente 31 dominós de dimensão 2x1? A localização dos dois quadrados retirados vai influenciar a resposta?

NOTA: O resultado é conhecido na literatura como o Teorema de Gomory (Ralfh Gomery é um matemátio da IBM que pensou o tabuleiro coberto por dois "garfos", os garfos de Gomery, veja na figura abaixo:



Facilita o entendimento se fizéssemos, de papel, um molde do tabuleiro, que recortado teria a seguinte visão:

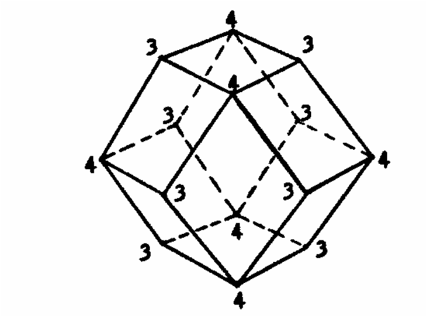


EXEMPLO 4

É muito popular um jogo de palitos para duas pessoas, que jogam alternadamente. Colocam-se 20 palitos sobre uma mesa. Uma jogada consiste na retirada de 1, 2 ou 3 palitos. Um jogador não pode escolher o mesmo número para retirar os palitos toda vez que for jogar. É obrigado a variar, isto é, retira 1 numa vez, na outra 2, em seguida retirar 1, na próxima vez 3 etc. O jogador que retirar o última palito perde. Qual é a estratégia para vencer o jogo?

EXEMPLO 5

Considere o dodecaedro abaixo:



É possível encontrar um caminho pelas arestas do dodecaedro passando por todos os vértices numa única vez?

EXEMPLO 6

Considere o seguinte jogo para duas pessoas. Dispõem-se de 15 caroços de feijão em três fileiras, como abaixo:

. . .

. . . . .

. . . .

Uma jogada consiste em retirar um número qualquer de caroços de uma mesma fileira. Eles jogam alternadamente. O jogador que tirar o último caroço perde o jogo. Qual a estratégia para vencer?

EXEMPLO 7

Imagine um poliedro com 1987 vértices. (Se você tem dificuldade para imaginar o poliedro, pense numa esfera ou mais praticamente, pense numa bola redonda. Marque 1987 pontos sobre a bola (esfera) e ligue todos esses pontos com segmentos de reta. Desse modo, você obtém um poliedro).

Imagine que cada uma das arestas do poliedro (isto é, os segmentos) é associado a uma carga elétrica +1 ou -1. Explique porque tem de existir um vértice do poliedro tal que o produto da carga de todas as aresta que partem dele é +1.

EXEMPLO 8

Duas crianças, Vivian e Camila, brincavam com um tabuleiro 7 x 7. Camila pediu para Vivian marcar cada um dos 49 quadrados com um dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de maneira tal que cada coluna possuísse todos os inteiros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e o tabuleiro ficasse simétrico em relação à sua diagonal D que vai do canto esquerdo superior até o canto direito inferior. Vivian observou que, após marcar todos os quadrados, a diagonal D possuía todos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ficou intrigada e se dispôs a repetir a marcação. Camila, então, falou que quando ela terminasse a nova marcação, todos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 apareceriam na diagonal. Explique o raciocínio de Camila.

EXEMPLO 9

Temos 105 moedas, entre as quais sabemos que há três moedas falsas. Cada moeda verdadeira têm o mesmo peso e o seu peso é maior que o das falsas, que também possuem o mesmo peso. Indicar de que maneira se pode selecionar 26 moedas autênticas realizando somente duas pesagem numa balança de dois pratos.

EXEMPLO 10

Priscila, Ana e Gabriela colocadas em uma roda se divertem com o seguinte jogo: uma delas escolhe um número inteiro e o diz em voz alta; a que está a sua esquerda divide esse número por seu maior divisor primo e fala o resultado em voz alta: e assim sucessivamente. Ganhará aquela que deve disser em voz alta o número 1, momento em que o jogo termina. Ana escolheu um número inteiro maior do que 50 e menor do que 100 e ganhou. Priscila escolheu o inteiro imediatamente superior ao escolhido por Ana e também ganhou. Quais são os números que Ana pode escolher?

EXEMPLO 11

Os números de 1 até 20 são escritos em linha, numa folha de papel, deixando-se um pequeno espaço entre eles. Dois jogadores iniciam o jogo e jogam alternadamente. Uma jogada consiste em colocar um sinal + ou - entre dois desses números. Quando todos os sinais são colocados o resultado da expressão é calculado. O primeiro jogador ganha se o resultado é par, e o segundo ganha se o resultado é ímpar. Quem ganhará e como?

EXEMPLO 12

Dois amigos, André e Thiago, observam vinte e cinco engradados de mangas sendo entregues num supermercado. Thiago fala que as mangas são de três espécies diferentes e todas as mangas de um engradado são de um mesmo tipo. André conclui que, no conjunto dos engradados, há no mínimo nove com o mesmo tipo de manga. Como pode André fazer essa conclusão?

EXEMPLO 13

Imagine que você tenha uma xícara de café e uma xícara de leite, com iguais quantidades de líquidos em cada xícara. Uma colher de leite é transferida da xícara de leite para a de café e misturada, e então uma colher da mistura é colocada na xícara de leite, de forma que no final a quantidade de líquido das duas xícaras permanece a mesma. Tem mais leite na xícara de café ou mais café na xícara de leite?

EXEMPLO 14

Existem seis pardais sobre seis árvores, cada pardal numa árvore. As árvores estão em fila, com 10 metros entre quaisquer duas vizinhas. Se um pardal voa de uma árvore para outra então ao mesmo tempo algum outro pardal voa de alguma árvore para outra percorrendo a mesma distância que o outro percorreu, mas na direção oposta. Desse modo, é possível que todos os pardais cheguem a ocupar uma única árvore? O que acontece se forem sete árvores e sete pardais?

EXEMPLO 15

Considere um tabuleiro 9 x 9. Dois jogadores disputam o seguinte jogo em que jogam alternadamente. Cada jogada consiste em marcar um quadrado do tabuleiro. O primeiro jogador marca o quadrado escolhido com X e o outro com Y. No fim do jogo, o primeiro jogador ganha um ponto por cada coluna que contenha mais X do que Y. O segundo jogador ganha um ponto por cada coluna que tenha mais Y do que X. O jogador com o maior número de pontos vence.

(a) Qual é a estratégia para vencer?
(b) Se o tabuleiro for 8 x 8, qual a estratégia para vencer ?

EXEMPLO 16

Nos países Dillia e Dallia as moedas são o **diller** e o **daller** respectivamente. Em Dillia você troca 1 diller por 10 daller's e em Dallia 1 daller vale 10 diller's. Um homem de negócios possui um diller e pode viajar para ambos os países, trocando dinheiro livre de taxas. Suponha que o homem de negócios não gaste seu dinheiro, fazendo câmbio em ambos os países ele terá em algum instante a mesma quantia de diller's e daller's?

EXEMPLO 17

Uma peça especial de xadrez chamada "camelo" se move no tabuleiro num caminho em forma de **L,** de comprimento 4 x 4 (de forma semelhante ao "cavalo", cujo caminho é um L de comprimento 1 x 3). É possível o camelo sair de algum quadrado do tabuleiro e retornar para um dos quadrados adjacentes a esse de onde ele saiu?

EXEMPLO 18

Existem muitas formas distintas de decompor um polígono convexo de n lados em triângulos, traçando diagonais que não se interceptam no interior do polígono.
Prove que o número de triângulos obtidos numa tal decomposição não depende da maneira como o polígono convexo de n lados é dividido, e ache esse número.

EXEMPLO 19

É possível escrever em linha reta os 11 números desde 1985 até 1995 em alguma ordem, de modo que o número de 44 algarismos que se obtém seja um número primo?

EXEMPLO 20

Um terno de números é dado. É permitido fazer a seguinte operação: mudar dois deles, digamos a e b, para $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ e $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

Se começamos com o termo (1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$), é possível obter (1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$) fazendo várias vezes a operação acima?

EXEMPLO 21

Um jogo começa com quatro montes de feijão, contendo 3, 4, 5 e 6 caroços de feijão respectivamente. Dois jogadores fazem seus movimentos que consistem em retirar:

(i) ou um caroço de um monte, deixando no final no mínimo dois naqueles montes;
(i i) ou um monte completo de dois ou três caroços.

O jogador que retirar o último monte ganha. Para vencer esse jogo, você tem de ser o primeiro ou o segundo a jogar?

EXEMPLO 22

Quantos pares de inteiros distintos x, y entre 1 e 1000 são tais que $x^2 + y^2$ é divisível por 49?
(considere os pares (x,y) e (y,x) como sendo os mesmos!)

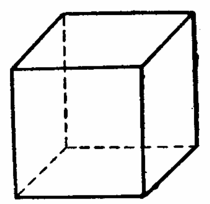
EXEMPLO 23

Um círculo é dividido em seis setores e os seis números 1, 0, 1, 0, 0, 0 são escritos, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, um em cada setor. É permitido somar um dos números com os colocados em setores adjacentes e substituir esse números por essa soma. Desse modo, em algum instante é possível obter o mesmo número em todos os setores?

EXEMPLO 24 ***Os Sólidos Platônicos***

O termo clássico "Sólido Platônico" é usado para designar um poliedro regular no espaço tridimensional. Um poliedro regular é uma figura geométrica sólida tal que:
(i) todas as faces são polígonos regulares e congruentes
(ii) o mesmo número de faces se encontram em cada vértice.

Um exemplo de sólido platônico é o cubo, veja figura abaixo



O cubo tem seis faces (que são quadrados), oito vértices e doze arestas. Em cada vértice se encontram três arestas. As arestas são as partes comuns a duas faces e compreendidas entre dois vértices.

Problema: Ache todos os sólidos platônicos.

EXEMPLO 25

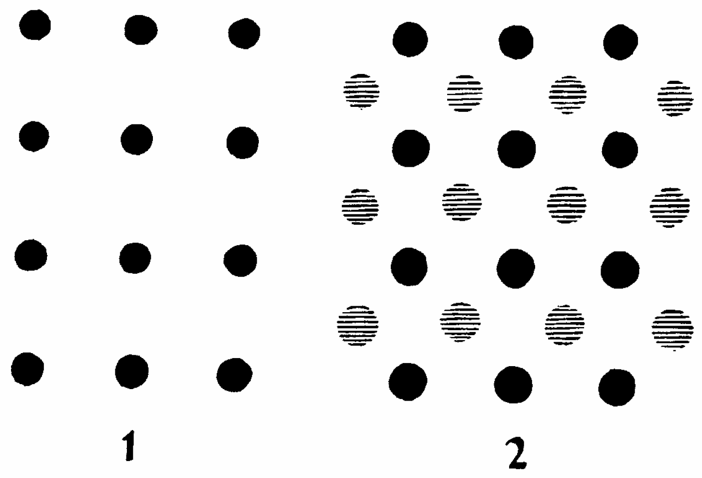
Imagine um tabuleiro de 5x5. Coloque um cavalo em cada quadrado, o cavalo é a peça cujo movimento consiste em saltar duas casas numa direção e uma na direção perpendicular; isto é, o salto do cavalo tem o percurso de um L, ou ainda, um salto 2x1. Será possível movimentar os 25 cavalos simultaneamente de maneira que, ao terminar, todos as casas do tabuleiro estejam ocupadas?

EXEMPLO 26

O jogo que vamos considerar deve ser disputado por 2 jogadores. Arranje 10 caroços de feijão em círculo, numerados de 1 até 10. Uma jogada consiste em retirar um ou dois caroços de feijão, mas se um jogador retirar dois terão de ser vizinhos, não sendo possível deixar espaços abertos entre ele. Aquele que retirar o último caroço ganha o jogo.
Quem ganha? Qual a estratégia para vencer?

EXEMPLO 27

O jogo que apresentamos a seguir foi inventado por David Gale, um professor de matemática de Brown University nos Estados Unidos. A versão explicada aqui pode ser jogada sobre um papel, com lápis de duas cores, por exemplo, um lápis preto e outro vermelho. Com o lápis preto faça 12 pontos (parte 1 da figura abaixo); com o lápis vermelho faça mais 12 pontos, veja Figura abaixo. A parte 2 da Figura abaixo é o local onde os jogadores disputam uma partida. Um jogador segura o lápis preto e seu oponente o vermelho. Uma jogada consiste em traçar uma linha horizontal ou vertical conectando dois pontos da mesma cor, pelo jogador que possui o lápis daquela cor. Os jogadores fazem suas jogadas alternadamente. O jogador com o lápis preto tenta formar um caminho contínuo da linha de cima dos pontos pretos para a linha de pontos pretos mais abaixo. O caminho pode não ser uma reta. O jogador com o lápis vermelho tenta formar um caminho semelhante, da coluna dos pontos vermelho mais à esquerda para a coluna de pontos vermelhos mais à direita. Cada um tenta usar suas linhas para bloquear a linha do seu oponente. O primeiro jogador que conseguir completar seu caminho vence.
O jogo pode não terminar num desenho de 12 pontos, talvez precise de mais pontos.
Quem ganha o jogo, o primeiro jogador ou o segundo?



EXEMPLO 28
Considere a figura abaixo.

Observe que ela possue 16 segmentos como lados.
Podemos traçar um caminho contínuo, plano que passe por cada segmentos exatamente uma única vez e sem passar por algum vértice?

DESAFIO 6
E se o caminho puder passar pelos vértices, é possível traçar o caminho contínuo?

EXEMPLO 29
Considere o seguinte jogo.
Três pessoas são colocadas em pé num círculo com os olhos fechados. Um chapéu é colocado sobre cada uma das cabeças. Cada chapéu é ou azul ou vermelho, e todos as três pessoas sabem disso. Elas abrem os olhos

simultaneamente, e cada uma delas que vê um chapéu vermelho levantará uma mão. A primeira pessoa que for capaz de identificar, corretamente, a cor do chapéu colocado em sua cabeça será o vencedor.

EXEMPLO 30 - Quantos feijões ?
Tome um monte de feijões (que eu não sei quantos caroços há). Faça três montes de feijões, de maneira tal que os montes fiquem enfileirados e que em cada um tenha o mesmo número de feijões. Retire dos montes laterais, três feijões e os coloque no monte do meio. Agora retire do monte do meio, tantos feijões quantos ficaram no monte lateral, colocando-os em um qualquer dos montes. Ficaram nove feijões no monte do meio. Por quê?

EXEMPLO 31 - Ache o valor da seguinte expressão:

$$\sqrt{1+1788\sqrt{1+1789\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+1994\sqrt{1+1995\sqrt{1+1996.1998}}}}}}$$

EXEMPLO 32 - Dispomos de uma folha de papel grande. Cortamos essa folha em cinco pedaços. A seguir, cortamos alguns desses pedaços em 5 pedaços, e assim por diante. Em algum momento teremos 1995 pedaços ? 1996 pedaços?

EXEMPLO 33 - Peça a um colega que pense num número qualquer de vários algarismos e que faça o seguinte:

-escreva o número pensado,
-mude como quiser a ordem dos algarismos,
-diminua o menor do maior,
-retire um algarismo do resto (que não seja zero),
- e diga os algarismos restantes na ordem que quiser.

Em resposta você dirá qual foi o algarismo retirado. Qual é o truque ?

EXEMPLO 34 - O Truque do adivinho
Escreva um número com três algarismos distintos. Coloque os algarismos em ordem inversa, formando um outro número com os três algarismos distintos. Subtraia o menor do maior. Coloque agora os algarismos da diferença em ordem inversa. Some então os dois últimos números obtidos. Olhe bem para esse <u>número final obtido</u> e abra um livro na página correspondente aos dois últimos

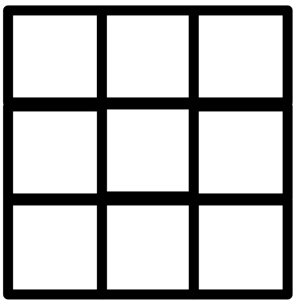
algarismos do número que você obteve e leia (em voz baixa), de cima para baixo, a linha correspondente ao número formado pelos dois primeiros algarismos do número final obtido acima. Feche o livro e passe-o às minhas mãos. Eu abrirei e lerei exatamente a linha que você leu. Como se explica isso?

EXEMPLO 35 - O JOGO DOS 11

Nesse jogo participam 2 jogadores. Colocam-se sobre um mesa 11 caroços de feijão. Os dois jogam alternadamente. O primeiro jogador retira um, dois ou três caroços, a quantidade a sua escolha. O segundo jogador retira um, dois ou três caroços, de acordo com sua vontade. Em seguida joga o primeiro com as regras estabelecidas, e assim por diante. Não se pode retirar mais que três caroços de uma vez. O que retirar o último caroço perde.
Como deverá jogar você para ganhar o jogo ?

EXEMPLO 36 - O JOGO DOS 15

Considere um tabuleiro 3 x 3, veja Figura abaixo. Jogam alternadamente dois jogadores. O primeiro jogador escreve, num dos quadrados, um número inteiro de 1 até 9. O segundo jogador escreve outro número, escolhendo um quadrado de tal forma, que o primeiro jogador, no seu lance seguinte, não pode terminar uma fila de três números (a fila pode ser diagonal ou transversal) com uma soma igual a 15. Ganha o jogador que termina em uma de suas jogadas com uma fila com soma 15.
Como você jogaria para ganhar sempre esse jogo?



EXEMPLO 37 - O Adivinho Indiscreto

Convide um colega para dizer, dentre as 6 listas abaixo, de 32 números cada, em quais delas está a sua idade. Imediatamente você advinha a idade dele.
Onde está o segredo ?

1	
3	35
5	37
7	39
9	41
11	43
13	45
15	47
17	49
19	51
21	53
23	55
25	57
27	59
29	61
31	63
33	

2	
3	35
6	38
7	39
10	42
11	43
14	46
15	47
18	50
19	51
22	54
23	55
26	58
27	59
30	62
31	63
34	

4	
5	37
6	38
7	39
12	44
13	45
14	46
15	47
20	52
21	53
22	54
23	55
28	60
29	61
30	62
31	63
36	

8	
9	41
10	42
11	43
12	44
13	45
14	46
15	47
24	56
25	57
26	58
27	59
28	60
29	61
30	62
31	63
40	

16	
17	49
18	50
19	51
20	52
21	53
22	54
23	55
24	56
25	57
26	58
27	59
28	60
29	61
30	62
31	63
48	

32	
33	49
34	50
35	51
36	52
37	53
38	54
39	55
40	56
41	57
42	58
43	59
44	60
45	61
46	62
47	63
48	

SOLUÇÕES

EXEMPLO 1

Dois amigos se divertem com o seguinte jogo. O primeiro jogador seleciona qualquer inteiro de 1 a 11 inclusive e diz ao segundo jogador, que soma esse número à qualquer número de 1 a 11 inclusive, falando o resultado ao primeiro jogador que o soma à qualquer número escolhido de 1 a 11, e assim eles vão jogando, alternadamente, até que um deles obtenha o número 56, vencendo o jogo. Qual é a estratégia para vencer?

Solução:

Um jogador estará na posição de vencer se seu adversário deixá-lo com qualquer número entre 45 e 55, inclusive. Um jogador que atingir 44 pode vencer, desde que ele jogue corretamente. De maneira análoga, um jogador que atinge 32 está em condições de vencer. A mesma coisa para 20 e para 8. Portanto, o primeiro jogador tem a vantagem. Se ele inicia com 8 e responde ao oponente fazendo um total de 20, 32, 44 e 56 respectivamente, nas jogadas de número 2, 3, 4 e 5, ele vence.

EXEMPLO 2

Prove que o número de pessoas presentes no teatro e que apertaram a mão de um número ímpar de pessoas é um número par.

Solução I

Seja S o conjunto das pessoas que apertaram a mão de um número par de pessoas e T o conjunto das pessoas que apertaram a mão de um número ímpar de pessoas. Para qualquer pessoa k, seja h_k o número de apertos de mão que ela deu. Como cada aperto de mão envolve exatamente duas pessoas, a soma

$$\sum_{x \in S} h_x + \sum_{y \in T} h_y$$

é o dobro do número de apertos de mãos e é, portanto, um número par. Como para cada $x \in S$, h_x é par, segue que $\sum_{x \in S} h_x$ é um número par. Então concluímos que $\sum_{y \in T} h_y$ é um número par. Como h_y é ímpar para cada $y \in T$, obrigatoriamente T tem de contar com um número par de pessoas.

Solução II

Antes de qualquer aperto de mão ocorrer, o número de pessoas que apertaram a mão um número ímpar de vezes é zero. O primeiro aperto de mão produz "duas pessoas ímpares", isto é, aquelas que apertaram a mão de um número ímpar de pessoas. A partir daí os apertos de mão ocorrerão entre duas "pessoas pares" (i. e. aquelas que apertaram a mão de um número par de pessoas), duas pessoas ímpares ou entre uma pessoa par e uma ímpar. Cada aperto de mão entre duas pessoas pares cresce o número de pessoas ímpares de dois. Cada aperto de mão entre uma pessoa par e uma ímpar, muda a pessoa ímpar para par e a pessoa par para ímpar, deixando o número de pessoas ímpares inalterado. Portanto, qualquer aperto de mão entre duas pessoas não alterar essa paridade. Logo, o número de pessoas que apertaram a mão de um número ímpar de pessoas é par.

EXEMPLO 3

Considere um tabuleiro de xadrez 8x8 e 32 dominós de dimensão 2x1. Obrigatoriamente os dominós podem ser arranjados sobre o tabuleiro de modo a cobri-lo inteiramente. Agora, dois quadrados situados nos cantos do tabuleiro são retirados, veja Figura 2 abaixo.

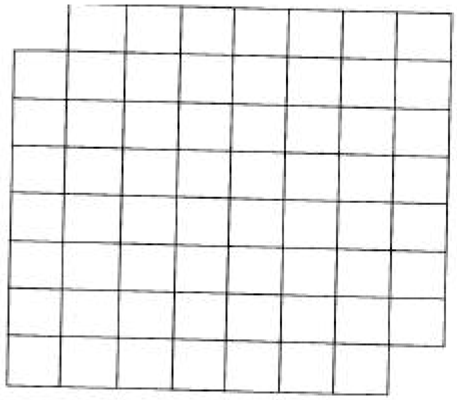


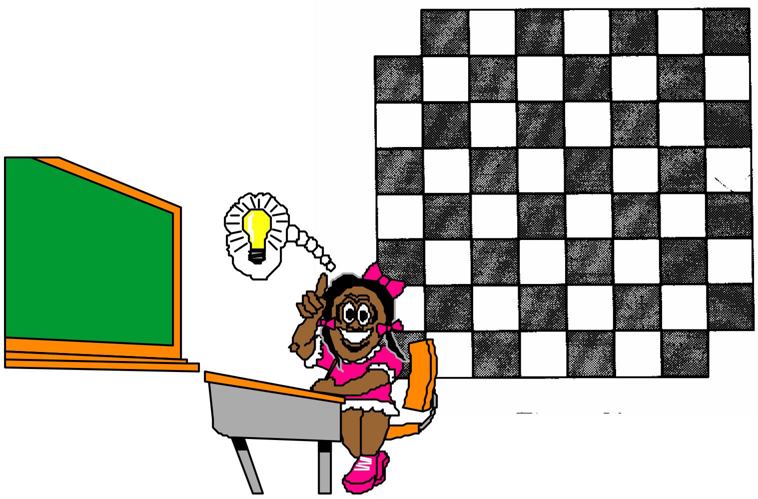
Figure 19

Diga, justificando, se 31 dominós cobrem completamente o tabuleiro reduzido.

Solução:

A resposta é não. Para ver isso, basta pintar os quadrados do tabuleiro com as cores branco e preto, de modo que dois quadrados adjacentes tenham cores distintas. Dessa forma, o tabuleiro normal tem 32 quadrados pretos e 32 quadrados brancos., Cada dominó cobre quadrados adjacentes, ou seja, exatamente 1 quadrado branco e 1 quadrado preto. Mas, 31 dominós vão cobrir somente 31 quadrados brancos.

No tabuleiro mutilado existem 32 pretos e 30 brancos. Os quadrados retirados



são brancos. Logo, a cobertura é impossível.

EXEMPLO 4

É muito popular um jogo de palitos para duas pessoas, que jogam alternadamente. Colocam-se 20 palitos sobre uma mesa. Uma jogada consiste na retirada de 1, 2 ou 3 palitos. Um jogador não pode escolher o mesmo número para retirar os palitos toda vez que for jogar. É obrigado a variar, isto é, retira 1 numa vez, na outra 2, em seguida retirar 1, na próxima vez 3 etc. O jogador que retirar o última palito perde. Qual é a estratégia para vencer o jogo?

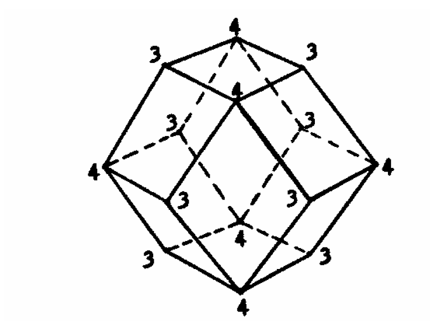
Solução:

O primeiro jogador sempre ganha. A estratégia é que o vencedor faz o número de palitos decrescer por um total de 4 entre uma jogada do adversário e a próxima. Se o adversário retirou 1 , o vencedor 3. Se o adversário retirar 2, o vencedor retirará 2. Se você começa o jogo, retire 3 palitos e deixe 17. Você vai jogando de modo que reste os números 17, 13, 9, 5 e 1.

Se você não começar (e o adversário não souber o truque), você espera que ele cometa um erro e daí por diante fará de acordo com a regra descrita acima.

EXEMPLO 5

Considere o dodecaedro abaixo:



É possível encontrar um caminho pelas arestas do dodecaedro passando por todos os vértices numa única vez?

Solução:
A solução do problema é devido ao geômetra canadense H.S.M. Coxeter. Ele mostrou que o tal caminho não existe. Chamando de *valência de um vértice* o número de aresta que partem desse vértice. A valência de cada vértice do dodecaedro acima é 3 ou 4. Além disso, cada vértice de valência 3 é cercado por vértices de valência 4. Inversamente, cada vértice de valência 4 é cercado por vértices de valência 3. Conseqüentemente, um caminho pelas arestas ligando os vértices tem de alternar vértice de valência 3 e vértice de valência 4. Mas, ao todo são 14 vértices e um tal caminho deveria conter 7 vértices de cada valência. Acontece que existem somente 6 vértices de valência 4. Logo, o tal caminho não existe.

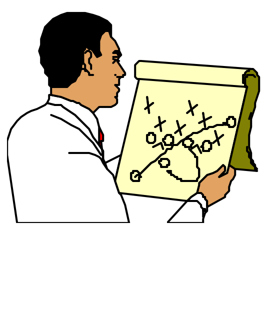
EXEMPLO 6
Considere o seguinte jogo para duas pessoas. Dispõem-se de 15 caroços de feijão em três fileiras, como abaixo:

. . .

. . . . .

. . . .

Uma jogada consiste em retirar um número qualquer de caroços de uma mesma fileira. Eles jogam alternadamente. O jogador que tirar o último caroço perde o jogo. Qual a estratégia para vencer?



Solução:

Para vencer o jogo precisamos atentar para algumas regras:

(a) Quando restarem caroços nas três fileiras, na nossa vez de jogar deixamos sempre número desigual de caroços em cada fileira. Mantemos isso até que existam somente dois caroços numa das filas e um nas outras duas, como abaixo:

• •
•
•

Então removemos um caroço da fileira de cima (a que possui dois caroços), de modo que reste a situação:

•
•
•

Nessa situação nós venceremos.

(b) Se, durante algum momento do jogo, duas fileiras têm o mesmo número de caroços, removemos todos os caroços da outra fileira, de modo que agora as duas fileiras possuem um número total par de caroços. Daí por diante procedemos como em (c).

(c) Se existem caroços somente em duas fileiras em quantidades desiguais, removemos, na nossa vez de jogar, caroços de uma fileira de modo que as duas fileiras possuam, cada uma, exatamente um número par de caroços. Continuaremos desse modo até que existem somente dois caroços em cada fileira.

• •
• •

Nossa próxima jogada vai depender do adversário. Se ele remove 1 caroço, removemos 2 da outra fileira e ele perde.
Se ele remove 2 caroços (ou todos os caroços de uma fileira), removemos 1 da fileira que restou e ele perde.

(d) Se em qualquer momento do jogo, antes da situação anterior de restarem 2 caroços em cada fileira, o adversário remover todos de uma fileira, nós deixamos somente 1 caroço da outra e ele perde.
Quando começamos o jogo, o melhor movimento é retirar um caroço de qualquer fileira.
Se o adversário começa o jogo, procedemos como em (a), (b) e (c).

EXEMPLO 7
Imagine um poliedro com 1987 vértices. (Se você tem dificuldade para imaginar o poliedro, pense numa esfera ou mais praticamente, pense numa bola redonda. Marque 1987 pontos sobre a bola (esfera) e ligue todos esses pontos com segmentos de reta. Desse modo, você obtém um poliedro).
Imagine que cada uma das arestas do poliedro (isto é, os segmentos) é associado a uma carga elétrica +1 ou -1. Explique porque tem de existir um vértice do poliedro tal que o produto da carga de todas as aresta que partem

dele é +1.
Solução:
Suponha que multiplicamos todos os produtos correspondentes a todos os vértices. Toda aresta é contada duas vezes (pois cada aresta liga dois vértices), toda carga +1 é contada duas vezes e toda carga -1 é contada duas vezes. Então o produto é +1. Mas, existe um número ímpar de vértices. Se o produto das cargas de todas as arestas que saem de um vértice qualquer for -1, então o produto de um número ímpar de (-1) seria +1. Contradição .
Logo existe no mínimo um vértice que tem produto das cargas igual a +1.

EXEMPLO 8
Duas crianças, Vivian e Camila, brincavam com um tabuleiro 7 x 7. Camila pediu para Vivian marcar cada um dos 49 quadrados com um dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de maneira tal que cada coluna possuísse todos os inteiros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e o tabuleiro ficasse simétrico em relação à sua diagonal D que vai do canto esquerdo superior até o canto direito inferior. Vivian observou que, após marcar todos os quadrados, a diagonal D possuía todos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ficou intrigada e se dispôs a repetir a marcação. Camila, então, falou que quando ela terminasse a nova marcação, todos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 apareceriam na diagonal. Explique o raciocínio de Camila.

Solução:

Cada número que estiver fora da diagonal vai aparecer duas vezes, acima e abaixo da diagonal D (pelo fato do tabuleiro ser simétrico em relação à diagonal D). Logo, os números fora da diagonal comparecem duas vezes (um número par). Como o número de vezes que cada um dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 aparece no tabuleiro é impar (pois, cada um aparece em cada coluna), todo algarismo tem de comparecer também na diagonal.

EXEMPLO 9

Temos 105 moedas, entre as quais sabemos que há três moedas falsas. Cada moeda verdadeira têm o mesmo peso e o seu peso é maior que o das falsas, que também possuem o mesmo peso. Indicar de que maneira se pode selecionar 26 moedas autênticas realizando somente duas pesagem numa balança de dois pratos.

Solução

Retiramos uma moeda e, assim, dividimos as restantes em dois grupos, que vamos chamá-los de B e C, cada um com 52 moedas. Colocamos esses grupos na balança, B num prato e C no outro.
Pode ocorrer:

(a) B e C têm o mesmo peso. Neste caso, a moeda que retiramos era falsa e tem uma falsa em cada grupo. Ficamos com qualquer um deles. Dividimos um desses grupos em dois de 26 moedas cada e colocamos um em cada prato da balança. O que pesar mais possui todas as moedas autênticas.

(b) B e C não têm o mesmo peso. Nesta situação, podemos deduzir que:

b1) ou B tem as três moedas falsas e C nenhuma
b2) ou B tem duas moedas falsas e C uma
b3) ou B tem duas falsas, C nenhuma e a moeda inicialmente retirada é falsa

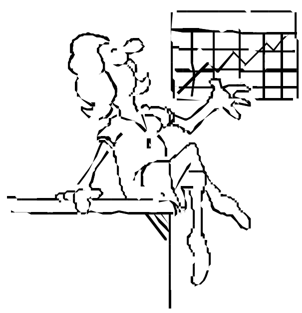
Se acontece b1), tomamos o grupo mais pesado (neste caso C) e dividimos em dois grupos de 26 que ficaram equilibrados nos pratos da balança e qualquer um terá todas as moedas verdadeiras.

Se acontece b2), pesamos dois grupos de 26 moedas de C. Um lado pesará menos e o que for mais pesado terá as moedas autênticas.

Se acontecer b3), procedemos como em b1).

EXEMPLO 10

Priscila, Ana e Gabriela colocadas em uma roda se divertem com o seguinte jogo: uma delas escolhe um número inteiro e o diz em voz alta; a que está a sua esquerda divide esse número por seu maior divisor primo e fala o resultado em voz alta: e assim sucessivamente. Ganhará aquela que disser em voz alta o número 1, momento em que o jogo termina. Ana escolheu um número inteiro maior do que 50 e menor do que 100 e ganhou. Priscila escolheu o inteiro imediatamente superior ao escolhido por Ana e também ganhou. Quais são os números que Ana pode escolher?



Solução:

Para que uma delas diga um número e ganhe, tem de falar um número composto por uma quantidade de fatores primos divisível por três. Os números formados por uma quantidade de fatores primos divisíveis por três, maiores do que 50 e menores do que 100 são:

2.2.13 = 52
3.3.7 = 63
2.2.2.2.2.2 = 64
2.3.11 = 66
2.2.17 = 68
2.5.7 = 70
3.5.5 = 75
2.2.19 = 76
2.3.13 = 78

2.2.23 = 92
2.2.2.2.2.3 = 96
2.7.7= 98
3.3.11 = 99

Priscila escolheu o número imediatamente superior ao que Ana escolheu e também ganhou. Existem somente três pares nessas condições:

63, 64 75, 76 98, 99

Logo, as escolhas possíveis de Ana são: 63, 75 e 98.

EXEMPLO 11

Os números de 1 até 20 são escritos em linha, numa folha de papel, deixando-se um pequeno espaço entre eles. Dois jogadores iniciam o jogo e jogam alternadamente. Uma jogada consiste em colocar um sinal + ou - entre dois desses números. Quando todos os sinais são colocados o resultado da expressão é calculado. O primeiro jogador ganha se o resultado é par, e o segundo ganha se o resultado é ímpar. Quem ganhará e como?

Solução:

O primeiro jogador sempre vence.
A quantidade de números ímpares escritos é par. Logo, o resultado vai ser sempre par, já que a soma ou diferença de dois números pares é par, a soma ou diferença de dois ímpares é par, e a soma ou diferença de um ímpar com um par é ímpar.

EXEMPLO 12

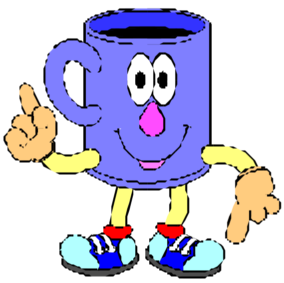
Dois amigos, André e Thiago, observam vinte e cinco engradados de mangas sendo entregues num supermercado. Thiago fala que as mangas são de três espécies diferentes e todas as mangas de um engradado são de um mesmo tipo. André conclui que, no conjunto dos engradados, há no mínimo nove com o mesmo tipo de manga. Como pode André fazer essa conclusão?

Solução:
O raciocínio de André é baseado no Princípio da Casa dos Pombos:

> "*Se temos $n + 1$ pombos e n casas, quando os pombos ocupam as casas temos sempre, no mínimo, dois numa mesma casa*".

Observe que $25 = 3.8+1$.
Considere os engradados numerados de 1 até 25. Numa distribuição em que os 8 primeiros engradados fossem compostos do tipo A de manga, os engradados de 9 até 16 fossem todos do tipo B e se os de 17 a 24 fossem todos do tipo C de manga, ainda sobraria um engradado, que obrigatoriamente seria de um dos tipos de manga. Logo teríamos, no mínimo, 9 engradados com o mesmo tipo de manga.

EXEMPLO 13
Imagine que você tenha uma xícara de café e uma xícara de leite, com iguais quantidades de líquidos em cada xícara. Uma colher de leite é transferida da xícara de leite para a de café e misturada, e então uma colher da mistura é colocada na xícara de leite, de forma que no final a quantidade de líquido das duas xícaras permanece a mesma. Tem mais leite na xícara de café ou mais café na xícara de leite?



Solução:
As quantidades são iguais.

Observe que se uma quantidade de leite é retirada da xícara de leite é substituída por igual quantidade de café (e vice-versa), já que, no final, cada xícara possui a mesma quantidade inicial de líquido.

EXEMPLO 14

Existem seis pardais sobre seis árvores, cada pardal numa árvore. As árvores estão em fila, com 10 metros entre quaisquer duas vizinhas. Se um pardal voa de uma árvore para outra então ao mesmo tempo algum outro pardal voa de alguma árvore para outra percorrendo a mesma distância que o outro percorreu, mas na direção oposta. Desse modo, é possível que todos os pardais cheguem a ocupar uma única árvore? O que acontece se forem sete árvores e sete pardais?

Solução:

Enumere as árvores de 1 até 6. Cada pardal terá um número correspondente a árvore em que está localizado, contando da esquerda para a direita. Observe que, quando um pardal voa de uma árvore numerada com x para uma outra numerada com y, y >x, então um outro pardal voa, em sentido contrário, percorrendo y-x, isto é, saindo da árvore w + (y-x) para a árvore w. Assim, a soma 1+2+3+4+5+6 = 21 é um invariante.

Inicialmente, o valor dessa soma é 21, e se todos os pardais estão numa mesma árvore numerada com, digamos, k , o valor dessa soma será 6k. Mas, 21 não é divisível por 6. Por isso, se conclui que os pardais jamais vão ocupar, simultaneamente , a mesma árvore.

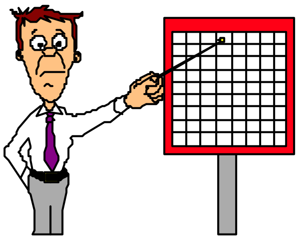
Por outro lado, se o número de pardais for 7, a soma inicial é
S= 1+2+3+4+5+6+7=28. Se todos ocuparem a mesma árvore k, teríamos 28.k = 7 , que pode, perfeitamente, acontecer.

EXEMPLO 15

Considere um tabuleiro 9 x 9. Dois jogadores disputam o seguinte jogo em que jogam alternadamente. Cada jogada consiste em marcar um quadrado do tabuleiro. O primeiro jogador marca o quadrado escolhido com X e o outro com Y. No fim do jogo, o primeiro jogador ganha um ponto por cada coluna que contenha mais X do que Y. O segundo jogador ganha um ponto por cada coluna que tenha mais Y do que X. O jogador com o maior número de pontos vence.

(c) Qual é a estratégia para vencer?

(d) Se o tabuleiro for 8 x 8, qual a estratégia para vencer ?



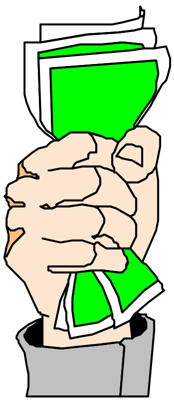
Solução:

(a) O primeiro jogador vence se ele marcar na sua jogada inicial o quadrado central e nas jogadas seguintes marcar o quadrado simétrico, em relação ao quadrado central do tabuleiro, ao quadrado marcado pelo opositor.

(b) Nesse caso, o segundo jogador empata. Basta seguir a estratégia descrita acima, de marcar sempre o quadrado simétrico, em relação ao ponto central, ao que o opositor marcar.

EXEMPLO 16

Nos países Dillia e Dallia as moedas são o **diller** e o **daller** respectivamente. Em Dillia você troca 1 diller por 10 daller's e em Dallia 1 daller vale 10 diller's. Um homem de negócios possui um diller e pode viajar para ambos os países, trocando dinheiro livre de taxas. Suponha que o homem de negócios não gaste seu dinheiro, fazendo câmbio em ambos os países ele terá em algum instante a mesma quantia de diller's e daller's?



Solução:

A resposta é **não**. Considere a diferença entre o número de diller e o número de daller que o homem de negócios possui. Em qualquer estágio, o resto da divisão por 11 dessa diferença é um invariante. Como inicialmente a diferença é 1, o homem de negócios nunca terá iguais quantidade das duas moedas.

EXEMPLO 17

Uma peça especial de xadrez chamada "camelo" se move no tabuleiro num caminho em forma de **L,** de comprimento 4 x 4 (de forma semelhante ao "cavalo", cujo caminho é um L de comprimento 1 x 3). É possível o camelo sair de algum quadrado do tabuleiro e retornar para um dos quadrados adjacentes a esse de onde ele saiu?

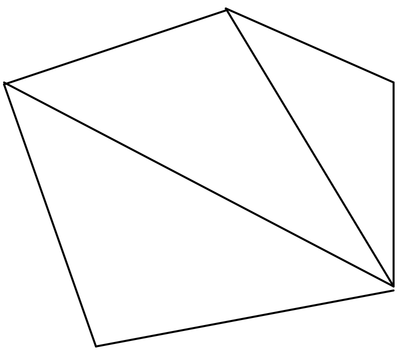
Solução:

A resposta é **não**. Pinte o tabuleiro, um quadrado branco e o adjacente preto. Observe que o movimento da peça é tal que ela se movimenta de um quadrado para outro de mesma cor. Logo, depois de inúmeros movimentos, não pode retornar para um dos quadrados adjacentes, pois eles têm cores distintas do quadrado original.

EXEMPLO 18

Existem muitas formas distintas de decompor um polígono convexo de n lados em triângulos, traçando diagonais que não se interceptam no interior do polígono.

Prove que o número de triângulos obtidos numa tal decomposição não depende da maneira como o polígono convexo de n lados é dividido, e ache esse número.



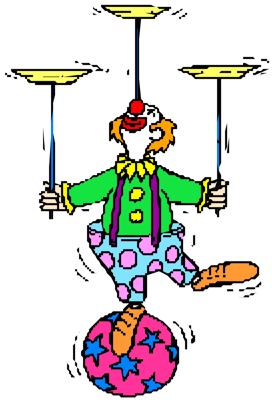
Solução:

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a (n-2).180º. Esse valor tem de ser igual à soma dos ângulos dos triângulos formados pelas diagonais que não se interceptam no interior do polígono dado. Isto é:

(n-2) 180º = k.180º, onde é o número de triângulos. Portanto, $n - 2 = k$

EXEMPLO 19

É possível escrever em linha reta os 11 números desde 1985 até 1995 em alguma ordem, de modo que o número de 44 algarismos que se obtém seja um número primo?



Solução:

Não. Qualquer número formado terá a forma:

$N = 19a_1b_119a_2b_219a_3b_3....19a_{11}b_{11}$ e temos que

(*) $a_1 + a_2 + a_3 +....+ a_{11} = 5.8 + 6.9 = 94$

(**) $b_1 + b_2 + b_3 + ...+ b_{11} = 0 + 1 + 2 + 3+ 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 5 = 50$

Vamos mostrar que N não pode ser primo porque é divisível por 11. Para isso, observe que:

Um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos das posições ímpares menos a soma dos algarismos das posições pares é um número divisível por 11.

Para N, a soma dos algarismos das posições ímpares menos a soma dos algarismos das posições pares é igual a:

11 x 1 - 11 x 9 + 94 -50 = -44, que é divisível por 11. Como N não é o 11 (pois é maior que 11), N tem de ser divisível por 11. Logo, N não pode ser primo.

EXEMPLO 20

Um terno de números é dado. É permitido fazer a seguinte operação: mudar dois deles, digamos a e b, para $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ e $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

Se começamos com o termo (1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$), é possível obter (1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$) fazendo várias vezes a operação acima?

Solução:

Não.

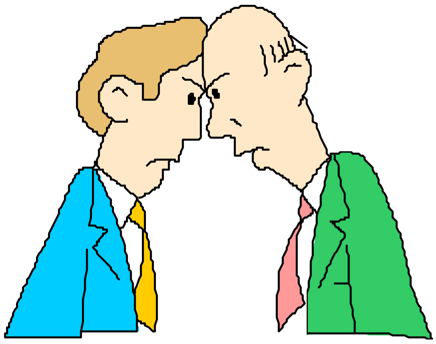
A soma dos quadrados dos número do terno não muda depois da operação descrita. Usando essa quantidade como o invariante do terno, podemos ver que os valores para os ternos dados são diferentes: $6 + 2\sqrt{2} \neq 13/2$.

EXEMPLO 21

Um jogo começa com quatro montes de feijão, contendo 3, 4, 5 e 6 caroços de feijão respectivamente. Dois jogadores fazem seus movimentos que consistem em retirar:

(i) ou um caroço de um monte, deixando no final no mínimo dois naqueles montes;
(i i) ou um monte completo de dois ou três caroços.

O jogador que retirar o último monte ganha. Para vencer esse jogo, você tem de ser o primeiro ou o segundo a jogar?



Solução:

O primeiro. Observemos que:

- Montes de 0 ou 1 caroço não influi no jogo. De fato, monte de 1 caroço nunca vai existir.
- Montes de 2 caroços se comportam como montes de 1 caroço, que podem ser removidos.
- Montes de 3 caroços são especiais.

Se não, um movimento remove exatamente um feijão, e o resultado depende somente da paridade do número total de feijões (contando um monte de dois como sendo um único feijão).

O primeiro jogador vence retirando um caroço de feijão do monte de 3, deixando montes de 2, 4, 5 e 6 feijões, cuja "soma" é 1 (=2) + 4 + 5 + 6, que é par.

Agora o vencedor é automático, desde que o adversário tem de fazer a "soma" ímpar. Qualquer que seja seu movimento, ele não consegue, exceto no caso em que o primeiro jogador movimente no monte de 4 feijões (isso não é necessário, desde que a soma será sempre ímpar, e todos os montes não poderão ter 4 caroços), e se o segundo jogador jogar num monte de 4-feijões, o primeiro remove todos os feijões restantes no movimento seguinte.

EXEMPLO 22

Quantos pares de inteiros distintos x, y entre 1 e 1000 são tais que $x^2 + y^2$ é divisível por 49?

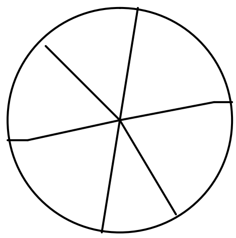
(considere os pares (x,y) e (y,x) como sendo os mesmos!)

Solução:
A resposta é que 10.011 pares são divisíveis por 49.
Observe que $x^2 + y^2$ é divisível por 49 se, e somente se, x e y são divisíveis por 7. Os múltiplos de 7 entre 1 e 1000 são: 7, 14, 21,....,994, ou seja, 142 múltiplos de 7. Logo o número de pares (x,y), com (x,y) = (y,x), possíveis é :

$$\frac{142^2 - 142}{2} = \frac{142x141}{2} = 10.011$$

(observe que tivemos que subtrair o número de pares do tipo (x,x), que ocorrem duas vezes, como também ocorrem duas vezes os pares (x,y) e (y,x).).

EXEMPLO 23
Um círculo é dividido em seis setores e os seis números 1, 0, 1, 0, 0, 0 são escritos, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, um em cada setor. É permitido somar um dos números com os colocados em setores adjacentes e substituir esse números por essa soma. Desse modo, em algum instante é possível obter o mesmo número em todos os setores?

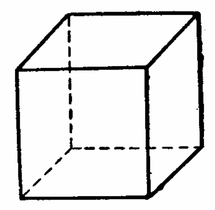


Solução:
Não. No sentido dos ponteiros do relógio, numere os setores de 1 a 6. Considere a diferença entre a soma dos números nos setores ímpares e a soma dos números nos setores pares. Esta quantidade é invariante, e seu valor inicial não é zero. Portanto, em nenhum momento pode ser zero.

EXEMPLO 24 ***Os Sólidos Platônicos***

O termo clássico "Sólido Platônico" é usado para designar um poliedro regular no espaço tridimensional. Um poliedro regular é uma figura geométrica sólida tal que:
(i) todas as faces são polígonos regulares e congruentes
(ii) o mesmo número de faces se encontram em cada vértice.

Um exemplo de sólido platônico é o cubo, veja figura.



O cubo tem seis faces (que são quadrados), oito vértices e doze arestas. Em cada vértice se encontram três arestas. As arestas são as partes comuns a duas faces e compreendidas entre dois vértices.

Problema: Ache todos os sólidos platônicos.

Solução:
O que surpreende neste problema é que a resposta vai nos mostrar que existem, exatamente, cinco sólidos platônicos, e que explicitamos todos eles. Para fazer isso, exploramos a fórmula de Euler:

$$\mathbf{V - A + F = 2}$$

onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Como as faces do poliedro são polígonos regulares, existem certas relações entre V, A e F. De fato, seja m o número de arestas, poderíamos pensar que o número total de arestas fosse m.F. Contudo isso não é verdade, porque cada

aresta limita duas faces, uma de cada lado da aresta. Logo mF representa duas vezes o número de arestas. Assim,

$$A = \frac{m.F}{2} \quad (*)$$

Agora, cada face possui m vértices (pois cada uma tem m arestas). A quantidade m.F conta cada vértice k vezes, pois cada vértice é o ponto de encontro de arestas, portanto de k faces. Desse modo,

$$V = \frac{m.F}{k} \quad (**)$$

Substituindo (*) e (**) na fórmula de Euler temos: $\frac{m.F}{k} - \frac{m.F}{2} + F = 2$.
Multiplicando ambos os lado da última igualdade por 2k e fatorando obtemos:

F . (2m + 2k - mk) = 4k (***)

Podemos tirar muitas conclusões de (***):

(i) não podemos ter, $m \geq 4$ e $k \geq 4$

De fato, se $m \geq k \geq 4$, então $mk \geq 4m$ e $mk \geq 4k$. Mulltiplicando cada desigualdade por ½ e somando membro a membro obtemos: $mk \geq 2m + 2k$.
Essa última desigualdade toma o membro esquerdo de (***) menor do que zero. Isso é impossível, pois o lado direito é positivo.
De maneira análoga, obtemos uma contradição se $k \geq m$. Assim, segue que uma das desigualdade é verdadeira: $m < 4$ ou $k < 4$

(ii) Não podemos ter $k > 5$ ou $m > 5$.

De fato, considere primeiro o caso em que $k > 5$. Pelo caso anterior, $m \leq 3$. Mas m=1 ou m=2 não faz sentido, pois uma face poligonal não pode ter 1 lado ou 2 lados. Logo, se $k > 5$, então m=3. Colocando essas informações no lado esquerdo na fórmula (***), temos:

$$F . (2.3 + 2 - 3) = 4 \text{ ou } F - (6- k) = 4.$$

Como $k > 5$, o lado esquerdo da última igualdade é menor do que igual a zero, o que é impossível. Um argumento análogo mostra que $m > 5$ não pode ocorrer.

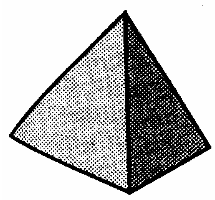
(iii) já sabemos que k e m têm de ser menores do que ou igual a 5 e que eles não podem ser, ao mesmo tempo, maior do que ou igual a 4. Logo, os únicos casos possíveis são:

m = 3; k = 3; 4; 5
m = 4; k = 3
m = 5; k = 3.

Observe que m = 1,2 não fazem sentido geometricamente, e tampouco faz sentido k = 1, 2. Isto limita nossa escolha.

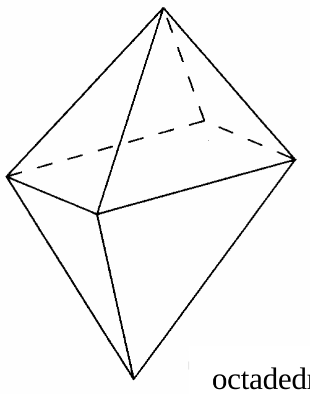
(iv) existem cinco casos para considerar, e cada um nos dá um sólido platônico:

(a) Se m = 3; k = 3, a equação (***) nos dá F=4. Estes dados correspondem a um poliedro com 4 faces, cada uma delas sendo um triângulo. E, nesse caso, três triângulos encontram-se numa face. Este é o ***tetraedro***, veja figura.



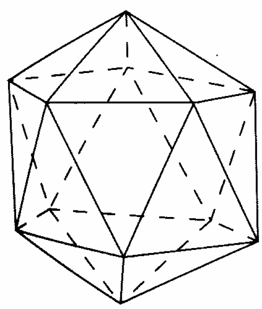
tetraedro

(b) Se m = 3, k = 4, a equação (***) nos dá que F = 8. Estes dados correspondem a um poliedro com 8 faces, cada uma delas sendo um triângulo. E, nesse caso, cada quatro triângulos encontram-se em cada vértice. Este é o ***octaedro***, veja a figura.



octadedro

(c) Se m = 3; k = 5, a equação (***) nos dá que F = 20. Estes dados correspondem a um poliedro 20 faces, cada uma delas sendo um triângulo. E cinco delas encontram-se em cada vértice. Este é o ***icosaedro***, veja figura.

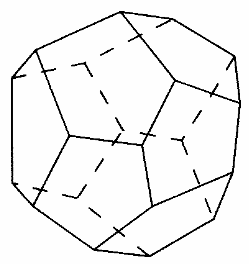


(c) The icosahedron

(d) Se m = 4, k = 3, então a equação (***) nos dá F = 6. Estes dados correspondem a um poliedro com seis faces, cada uma delas é um quadrado. E três quadrados encontram-se em cada vértice. Este é o ***cubo***, já mostrado acima.

(e) Se m = 5, k = 3, a equação (***) nos dá F = 12. Estes dados correspondem a um poliedro com doze faces, cada uma delas é um pentágono. E três pentágono

Icosaedro



Cada face é um pentágono

Figure 102

encontram-se em cada vértice. Este é o **dodecaedro,** veja figura abaixo.

Portanto, os *sólidos platônicos* são:

tetraedro
octaedro
icosaedro
cubo e o dodecaedro

EXEMPLO 25

Imagine um tabuleiro de 5x5. Coloque um cavalo em cada quadrado, o cavalo é a peça cujo movimento consiste em saltar duas casas numa direção e uma na direção perpendicular; isto é, o salto do cavalo tem o percurso de um L, ou ainda, um salto 2x1. Será possível movimentar os 25 cavalos simultaneamente de maneira que, ao terminar, todos as casas do tabuleiro estejam ocupadas?

Solução:

É impossível. É fácil ver através de um critério de paridade. O salto do cavalo desloca-se para uma casa de cor diferente. Um tabuleiro 5 por 5 possui 13 casas de uma cor e 12 casas de outra. Não é possível, evidentemente, que 13 cavalos saltem todos para 12 casas distintas sem que 2 deles cheguem, obrigatóriamente, à mesma casa.

Desafio:
Se o tabuleiro fosse 7 por 7 e usássemos 49 cavalos, o resultado seria verdadeiro? E para um tabuleiro 9 por 9 e 81 cavalos? Qual é a sua conclusão?

Desafio:
Se em vez de cavalos, usássemos torres, limitadas a deslocamento de uma casa, qual seria sua resposta?

Desafio:
No tabuleiro 5x5, se usássemos uma combinação de 13 torres e 12 cavalos, qual seria sua resposta?

EXEMPLO 26
O jogo que vamos considerar deve ser disputado por 2 jogadores. Arranje 10 caroços de feijão em círculo, numerados de 1 até 10. Uma jogada consiste em retirar um ou dois caroços de feijão, mas se um jogador retirar dois terão de ser vizinhos, não sendo possível deixar espaços abertos entre ele. Aquele que retirar o último caroço ganha o jogo.
Quem ganha? Qual a estratégia para vencer?

Solução:
O segundo jogador sempre ganha, se ele usa as duas estratégias seguintes:

(i) Depois que o primeiro jogador tiver removido um ou dois caroços, existirá um arco sem falha no círculo formado pelos feijões. O segundo jogador tira um ou dois feijões diametralmente opostos àqueles que o primeiro jogador retirou, de maneira que os feijões são divididos em dois arcos com igual quantidade de caroços.

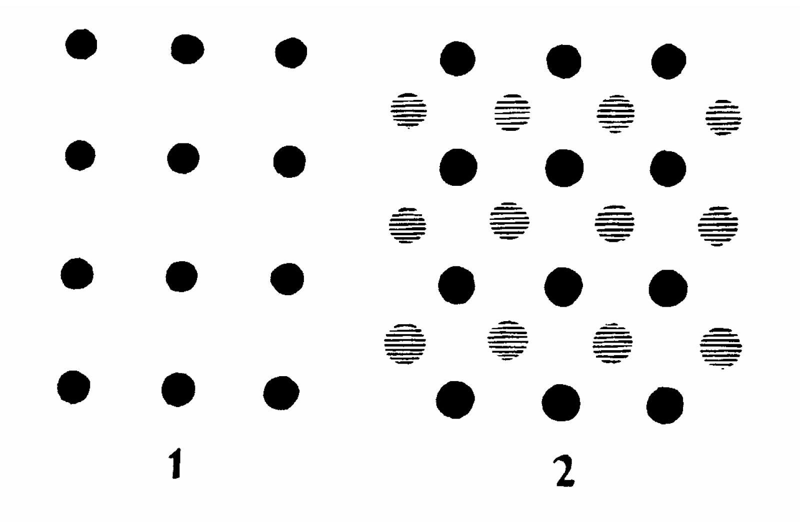
(ii) De agora em diante, se o primeiro jogador retira caroços de um arco, o segundo jogador retira do arco oposto, na posição diametralmente oposta.

EXEMPLO 27

O jogo que apresentamos a seguir foi inventado por David Gale, um professor de matemática de Brown University nos Estados Unidos. A versão explicada aqui pode ser jogada sobre um papel, com lápis de duas cores, por exemplo, um lápis preto e outro vermelho. Com o lápis preto faça 12 pontos (parte 1 da figura abaixo); com o lápis vermelho faça mais 12 pontos, veja Figura abaixo. A parte 2 da Figura abaixo é o local onde os jogadores disputam uma partida. Um jogador segura o lápis preto e seu oponente o vermelho. Uma jogada consiste em traçar uma linha horizontal ou vertical conectando dois pontos da mesma cor, pelo jogador que possui o lápis daquela cor. Os jogadores fazem suas jogadas alternadamente. O jogador com o lápis preto tenta formar um caminho contínuo da linha de cima dos pontos pretos para a linha de pontos pretos mais abaixo. O caminho pode não ser uma reta. O jogador com o lápis vermelho tenta formar um caminho semelhante, da coluna dos pontos vermelho mais à esquerda para a coluna de pontos vermelhos mais à direita. Cada um tenta usar suas linhas para bloquear a linha do seu oponente. O primeiro jogador que conseguir completar seu caminho vence.

O jogo pode não terminar num desenho de 12 pontos, talvez precise de mais pontos.

Quem ganha o jogo, o primeiro jogador ou o segundo?



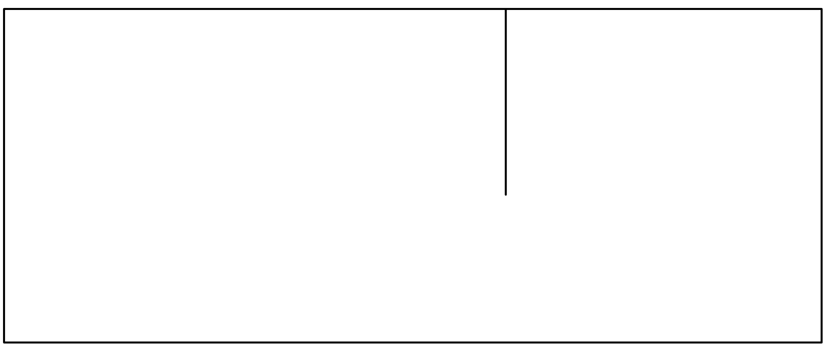
Solução:

Jogando racionalmente, o primeiro jogador vence, não importa quantos pontos hajam sido marcados.
Vamos fazer a demonstração pelo método de *redução ao absurdo*. A seguir, vamos descrever as diversas etapas da demonstração:

(i) Suponha que o segundo jogador tem uma estratégia para ganhar o jogo.
(ii) O primeiro jogador traça sua primeira linha em qualquer lugar. Depois que o segundo jogador traçar, uma linha, o primeiro jogador finge que ele é o segundo jogador, e joga com a estratégia vencedora.
(iii) A linha que o primeiro jogador fez no seu primeiro movimento não pode contradizer a estratégia vencedora. Isto é, se ela não é parte da estratégia, não importa onde foi traçada. Se ela é parte da estratégia, então quando chegar a vez de traçá-la ele faz uma outra num lugar qualquer.
(iv) Portanto o primeiro jogador pode vencer.
(v) Mas isto contradiz nossa hipótese inicial de que o segundo jogador poderia ganhar. Logo, essa hipótese é falsa.
(vi) Se o jogo não termina numa quantidade de pontos iniciais, não existe estratégia vencedora para o segundo jogador, logo tem de existir uma estratégia para o primeiro.

Existem muitas maneiras diferentes de jogar, mas se o primeiro jogador, no movimento inicial, conecta dois pontos que estão próximos do centro ele sempre ganha.

EXEMPLO 28
Considere a figura abaixo.



Observe que ela possue 16 segmentos como lados.
Podemos traçar um caminho contínuo, plano que passe por cada segmento

exatamente uma única vez e sem passar por algum vértice?

Solução:
O retângulo maior está dividido em cinco regiões. Observe que três dessas regiões - (a que se encontra acima e à esquerda, a que está acima e à direita e a que está abaixo no centro) cada uma tem um número ímpar (cinco) de “lados”. Agora, o fato crucial sobre uma região R com um número ímpar de lados limitados é este:

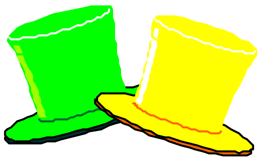
> *Se um caminho começa em R então não pode terminar em R; se o caminho não começa em R então ele tem de terminar em R.*

Para ver isso, suponha que uma região V possui três lados. Suponha que o caminho começa dentro da região V. No primeiro movimento, quando o caminho cruzar um lado, então o caminho está no exterior de V. Algum tempo depois (pode não ser imediatamente) o caminho cruza um outro lado; nesse momento estará passando para dentro da região V. Como ainda tem um lado para cruzar e então passará para fora da região V. Como todos os lados já foram interceptados pelo caminho, então ele terminará fora da região, pois se entrar na região deverá cruzar um lado que já foi interceptado.

Retomando à região R. Vamos chamar as três regiões da figura que possuem um número ímpar de lado de E1, E2, E3. Se o caminho começa num ponto exterior de qualquer uma dessas regiões, então tem de terminar dentro de cada uma dessas regiões. Como os interiores de Ej são dois a dois disjuntos, isto é impossível.
Agora, supondo que o caminho começa no interior de E1. Assim, ele começa um ponto que é exterior a E2 e E3. Nosso raciocínio mostra que o caminho tem de terminar num ponto exterior a E1, mas também interno a E2 e E3. O que é impossível.

EXEMPLO 29
Considere o seguinte jogo.

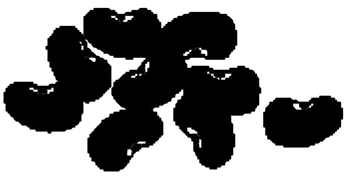
Três pessoas são colocadas em pé num círculo com os olhos fechados. Um chapéu é colocado sobre cada uma das cabeças. Cada chapéu é ou azul ou vermelho, e todos as três pessoas sabem disso. Elas abrem os olhos simultaneamente, e cada uma delas que vê um chapéu vermelho levantará uma mão. A primeira pessoa que for capaz de identificar, corretamente, a cor do chapéu colocado em sua cabeça será o vencedor.



Solução:
Suponha que os jogadores são chamados A, B e C. Seja C aquele que usa um chapéu azul. Como existem dois chapéus vermelhos, todos os três jogadores levantam as mãos. O jogador A vê que C está usando o chapéu azul, pois se C estivesse usando um chapéu vermelho então B não teria uma mão levantada. Então A conclui que ele estaria usando chapéu vermelho. B pode raciocinar de forma semelhante. Então A ou B seriam os ganhadores: O jogador C perde.

EXEMPLO 30 - Quantos feijões ?

Tome um monte de feijões (que eu não sei quantos caroços há). Faça três montes de feijões, de maneira tal que os montes fiquem enfileirados e que em cada um tenha o mesmo número de feijões. Retire dos montes laterais, três feijões e os coloque no monte do meio. Agora retire do monte do meio, tantos feijões quantos ficaram no monte lateral, colocando-os em um qualquer dos montes.
Ficaram nove feijões no monte do meio. Por quê?



Solução:
Cada monte tem, digamos, n caroços de feijão. Se retiramos dos montes laterais 3 caroços e os colocamos no monte central, cada monte tem agora:

monte 1	monte 2	monte 3

n-3 n + 3 + 3 n-3

Se retiramos do monte central tantos feijões quanto ficou em qualquer monte lateral, teremos:

$$n + 3 + 3 - (n - 3) = n + 3 + 3 - n + 3 = 9.$$

EXEMPLO 31 - Ache o valor da seguinte expressão:

$$\sqrt{1+1788\sqrt{1+1789\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+1994\sqrt{1+1995\sqrt{1+1996.1998}}}}}}$$

Solução:

Conhecemos algum problema parecido com esse?

A expressão embaixo do último radical pode ser familiar!

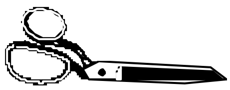
1996 x 1998 pode ser escrita como $(1997 - 1) \times (1997 + 1) = 1997^2 - 1$. Assim,

$1 + 1996.\ 1998 = 1 + (1997 - 1) \times (1997 + 1) = 1 + 1997^2 - 1 = 1997^2$

Logo, a última raiz é igual a 1997 e a raiz seguinte torna-se $\sqrt{1+1995.1997}$

Agora é só continuar o mesmo processo. Não é difícil perceber que a resposta é 1789.

EXEMPLO 32 - Dispomos de uma folha de papel grande. Cortamos essa folha em cinco pedaços. A seguir, cortamos alguns desses pedaços em 5 pedaços, e assim por diante. Em algum momento teremos 1995 pedaços ? 1996 pedaços?



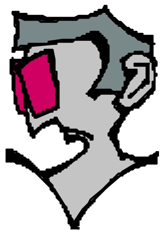
Solução:

Cada vez que cortamos uma folha de papel em cinco pedaços juntamos 4 pedaços de papel ao conjunto dos pedaços já existentes. Ao cabo de n operações teremos obtidos $4n + 1$ pedaços. A equação $4n + 1 = 1995$ pode ser escrita como $4n = 1995 - 1$, ou seja $4n = 1994$ que não tem solução no conjunto dos números naturais N. Portanto, é impossível obter 1995 pedaços. Raciocínio análogo para 1996.

EXEMPLO 33 - Peça a um colega que pense num número qualquer de vários algarismos e que faça o seguinte:

-escreva o número pensado,
-mude como quiser a ordem dos algarismos,
-diminua o menor do maior,
-retire um algarismo do resto (que não seja zero),
- e diga os algarismos restantes na ordem que quiser.

Em resposta você dirá qual foi o algarismo retirado. Qual é o truque ?



Solução:
Quando dividimos a soma dos algarismos de um número por 9 dá o mesmo resto quando dividimos o próprio número por 9. Dois números formados com os mesmos algarismos, mas colocados em outra ordem, devem, por esta razão, ter os mesmos restos quando da divisão por 9. Por conseguinte, se de um desses números se subtrai o outro, a diferença será divisível por 9 (porque a diferença dos resto é nula).

EXEMPLO 34 - O Truque do adivinho
Escreva um número com três algarismos distintos. Coloque os algarismos em ordem inversa, formando um outro número com os três algarismos distintos. Subtraia o menor do maior. Coloque agora os algarismos da diferença em ordem inversa. Some então os dois últimos números obtidos. Olhe bem para esse número final obtido e abra um livro na página correspondente aos dois últimos algarismos do número que você obteve e leia (em voz baixa), de cima para baixo, a linha correspondente ao número formado pelos dois primeiros algarismos do número final obtido acima. Feche o livro e passe-o às minhas mãos. Eu abrirei e lerei exatamente a linha que você leu. Como se explica isso?

Solução:
Basta verificar que, para qualquer número escrito, o resultado é sempre 1089.

EXEMPLO 35 - O JOGO DOS 11

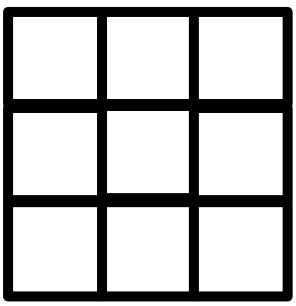
Nesse jogo participam 2 jogadores. Colocam-se sobre um mesa 11 caroços de feijão. Os dois jogam alternadamente. O primeiro jogador retira um, dois ou três caroços, a quantidade a sua escolha. O segundo jogador retira um, dois ou três caroços, de acordo com sua vontade. Em seguida joga o primeiro com as regras estabelecidas, e assim por diante. Não se pode retirar mais que três caroços de uma vez. O que retirar o último caroço perde.
Como deverá jogar você para ganhar o jogo ?

Solução

Se você é o primeiro, deve retirar dois feijões, restando nove sobre a mesa. Qualquer que seja o número de feijões retirado pelo outro, na sua segunda retirada você deve deixar cinco sobre a mesa. Desse modo, qualquer que seja a jogada do segundo, na sua próxima jogada você deixa um caroço sobre a mesa e ganha o jogo.
Se você é o segundo, você só ganha se o adversário não conhecer o segredo.

EXEMPLO 36 - O JOGO DOS 15

Considere um tabuleiro 3 x 3, veja Figura abaixo. Jogam alternadamente dois jogadores. O primeiro jogador escreve, num dos quadrados, um número inteiro de 1 até 9. O segundo jogador escreve outro número, escolhendo um quadrado de tal forma, que o primeiro jogador, no seu lance seguinte, não pode terminar uma fila de três números (a fila pode ser diagonal ou transversal) com uma soma igual a 15.Ganha o jogador que termina em uma de suas jogadas com uma fila com soma 15.
Como você jogaria para ganhar sempre esse jogo?

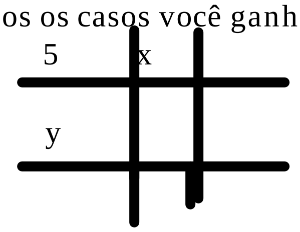


Solução:

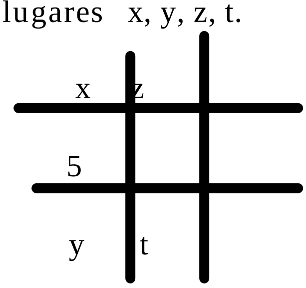
Para ganhar você tem que começar com o número 5. Mas, em que quadrado tem que escrevê-lo? Vamos estudar três casos.

Caso 1 - Escreva o 5 no quadrado central. Qualquer que seja o quadrado que seu adversário escrever um valor x você escreve 15 - 5 - x = 10 - x, onde x é o número que seu adversário escreveu.

Caso 2 - Escreva o 5 num dos quadrados dos cantos. Digamos que seu adversário escolheu um dos quadrado x ou y. Se ele lá colocou x, vocês escolherá y = 10 - x. Em ambos os casos você ganhará.



Caso 3 - Escreva o 5 no quadrado do meio da coluna esquerda. Seu adversário pode ocupar um dos quatro lugares x, y, z, t.



Para a jogada do número x nessa posição você responderá com y = 10 - x. Para y você responderá x = 10 - y; para z você fará t = 10 - z e para t você responderá com z = 15 - t. Em todos esses casos ganhará.

EXEMPLO 37 - O Adivinho Indiscreto

Convide um colega para dizer, dentre as 6 listas abaixo, de 32 números cada, em quais delas está a sua idade. Imediatamente você advinha a idade dele.

Onde está o segredo ?

1		2		4		8		16		32	
3	35	3	35	5	37	9	41	17	49	33	49
5	37	6	38	6	38	10	42	18	50	34	50
7	39	7	39	7	39	11	43	19	51	35	51
9	41	10	42	12	44	12	44	20	52	36	52
11	43	11	43	13	45	13	45	21	53	37	53
13	45	14	46	14	46	14	46	22	54	38	54
15	47	15	47	15	47	15	47	23	55	39	55

17	49	18	50	20	52	24	56	24	56	40	56
19	51	19	51	21	53	25	57	25	57	41	57
21	53	22	54	22	54	26	58	26	58	42	58
23	55	23	55	23	55	27	59	27	59	43	59
25	57	26	58	28	60	28	60	28	60	44	60
27	59	27	59	29	61	29	61	29	61	45	61
29	61	30	62	30	62	30	62	30	62	46	62
31	63	31	63	31	63	31	63	31	63	47	63
33		34		36		40		48		48	

Solução:

Um número n, entre 1 e 63, pode ser escrito como

$$n = a_5 .2^5 + a_4 .2^4 + a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2 + a_0$$

onde os números a_5 , a_4 , a_3 , a_2 , a_1 , a_0 são 0 ou 1. Neste caso, a representação do número n na base 2 é, exatamente, $a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, a_0$, onde $a_i = 0$ ou 1, i = 1,2,3,4,5.

Pois bem, na primeira lista do adivinho estão os números para os quais $a_0 = 1$, isto é, aqueles que terminam em 1 quando escritos na base 2; na segunda lista estão os números para os quais $a_1 = 1$, ou seja, aqueles, entre 1 e 63, que têm 1 na segunda casa da direita para esquerda, quando escritos na base 2; na terceira estão aqueles para os quais $a_2 = 1$, e assim por diante.
É claro, agora, porque cada idade é igual à soma dos primeiros números de cada lista em que ela esteja!

PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Considere um tabuleiro 8 x 8.
   (a) Calcule o número de retângulo de todas as ordens possíveis existentes no tabuleiro.
   (b) Determine também o número total de quadrados de todas as ordens possíveis existentes nesse tabuleiro.

2) Considere sete pontos dentro de hexágono regular cujos lados medem 1 cm. Prove que três desses pontos formam um triângulo cuja área é menor do que ou igual a 1/6 da área do hexágono.

3) Prove que todo poliedro possui no mínimo duas faces com o mesmo número de arestas.

4) O fatorial de 35, isto é, o produto dos números 1x 2 x 3 x 4 x ...... x 33 x 34 x 35, é um número com 41 algarismos:

35! = 10333147966386144929□66651337523200000000.

No lugar do algarismo central está um quadrado. Que algarismo teve seu lugar ocupado pelo quadrado?
(Você pode descobrir rapidamente esse algarismo sem efetuar uma só multiplicação!)

5) Quais as dimensões do maior cubo cujas seis faces podem ficar completamente cobertas dobrando à sua volta um molde recortado de uma folha quadrada de papel de 3 cm de lado e sem superposição do papel?
(Como é óbvio, a figura recortada no papel deve ser uma peça inteira.)

6) Considere um triângulo retângulo cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 5 cm respectivamente. Ache o comprimento mínimo que deve ter um segmento que divide esse triângulo em duas partes de áreas iguais.

7) Escreva o próximo número da seqüência: 9, 61, 52, 63, 94, 18, ...

8) Dados 8 inteiros positivos distintos, a_1, a_2, a_3, ... , a_8, pertencentes ao conjunto {1, 2, 3, ..., 15, 16}, prove que existe um número k para o qual

$$a_i - a_j = k$$

admite no mínimo três soluções distintas do tipo (a_i, a_j).

9) Três homens jogam determinado jogo com o acerto de que o perdedor paga o dobro do dinheiro dos outros dois. Depois de três partidas, cada um perdeu, exatamente, uma vez e cada um possui R$ 24,00. Quanto tinha cada um no início do jogo?

BIBLIOGRAFIA

[1] FOMIN, DMITRI-GENKIN, SERGEY-ITENBERG,ILIA –
Mathematical Circles (Russian Experience)
American Mathematical Society, 1996

[2] FROHLICHSTEIN, JACK – Mathematical Fun, Games and Puzzles.
Dover Publiations, Inc. New York, 1962

[3] GARDNER, MARTIN – Entrertaining Mathematical Puzzles. Dover
Publications, Inc. New York, 1986

[4] GARDNER, MARTIN – O Festival Mágico da Matemática. Gradiva –
Publicações L. da Lisboa, 1994

[5] HONSBERGER, ROSS – Mathematical Gems I. The Mathematical
Association of America, 1973

[6] KORDENSKY, BORIS ANASTAS'EVICH – The Moscow puzzles:
359 Mathematical Recreations. Dover Publications, Inc. New
York, 1992

[7] OZAMIZ, MIGUEL DE GUZMÁN – Aventuras Matemáticas.
Gradiva – Publicações L. da Lisboa, 1991.

[8] POLYA, GEORGE – Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton
University Press, New Jersey , 1990

[9] SOIFER, ALEXANDER – Colorado Mathematical Olympiad and
Further Explorations. Center for Excellene in Mathematical
Education. Colorado Springs, 1994

[10] KRANTZ, STEVEN GEORGE – Techniques of Problem Solving.
American Mathematical Society 1997

[11] YAGLOM, A. M.-YAGLOM I. M. – Challenging Mathematical
Problems with Elementary Solutions vol I. Dover Publications, Inc.
New York, 1987