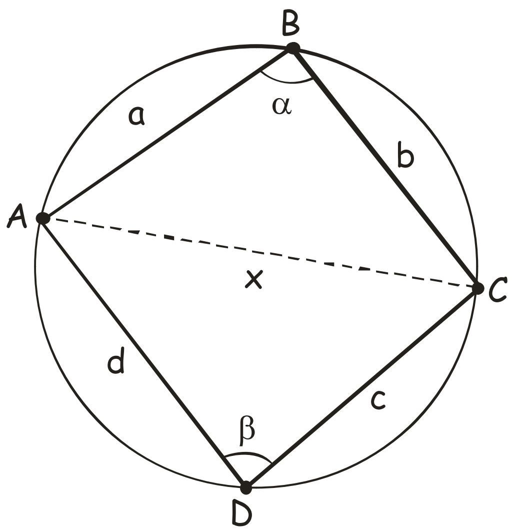
Heron para quadriláteros

Augusto Macêdo e Carlos A. Gomes
Natal/RN

É bastante conhecida a fórmula de Heron para determinar a pedida da área de um triângulo quando são conhecidas as medidas dos seus lados, $(ABC)=\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, onde $p=\frac{a+b+c}{2}$ é o semi-perímetro. Entretanto é pouco conhecida e divulgada no ensino médio a generalização dessa fórmula para um quadrilátero inscritível cujos lados medem a, b, c e d , que é dada pela expressão $(ABCD)=\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)}$. Ainda menos conhecida e divulgada é a generalização dessa fórmula para um quadrilátero qualquer (inscritível ou não) cujos lados medem a, b, c e d e sendo também conhecido θ, a média aritmética de dois ângulos opostos do quadrilétero $(ABCD)=\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)-a.b.c.d.\cos^2\theta}$. Esse pequeno artigo foi escrito pelo meu amigo prof. Augusto Macedo há 10 anos e só agora resolvi ressussitá-lo e divulgá-lo para todos os amantes da geometria !

1.QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Iniciemos analisando o quadrilátero inscritível abaixo:



I.Acompanhe os seguintes passos:

i) $\alpha+\beta=180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha=\text{sen}\beta \\ \cos\alpha=-\cos\beta \end{cases}$

ii) Na figura acima é fácil ver que : (   ) = medida da área

$$\Delta ABC \Rightarrow (ABC)=\frac{1}{2}.a.b.\text{sen}\alpha$$

$$\Delta ACD \Rightarrow (ACD)=\frac{1}{2}.c.d.\text{sen}\beta$$

Logo $(ABCD)=(ABC)+(ACD)=\frac{1}{2}.a.b.sen\alpha+\frac{1}{2}.c.d.sen\beta$. Mas ocorre que $\alpha+\beta=180°$, visto que o quadrilátero ABCD acima é inscritível. Assim segue que $sen\alpha=sen\beta$ e portanto,

$$(ABCD)=(ABC)+(ACD)=\frac{1}{2}.a.b.sen\alpha+\frac{1}{2}.c.d.sen\beta=\frac{1}{2}.a.b.sen\alpha+\frac{1}{2}.c.d.sen\alpha$$

ou seja, $(ABCD)=\frac{1}{2}.(ab+cd).sen\alpha$.

iii) Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABC e ACD obtemos $\begin{cases} x^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha \\ x^2=c^2+d^2-2cd\cos\beta \end{cases}$. Mas ocorre que $\cos\beta=-\cos\alpha$, visto que $\alpha+\beta=180°$. Diante disso, segue que

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2+2cd\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$$

Como $sen\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, temos então $sen\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2.(ab+cd)}\right)^2}$.

II. Cálculo da área

Temos de (iii) que $(ABCD)=\frac{1}{2}.(ab+cd).sen\alpha$, então

$$(ABCD)=\frac{1}{2}.(ab+cd).\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2.(ab+cd)}\right)^2}\Rightarrow$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{(ab+cd)^2}{4}.\left[\frac{4.(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4.(ab+cd)^2}\right]}\Rightarrow$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[(2ab+2cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2\right]}\Rightarrow$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[\left(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right).\left(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right)\right]}\Rightarrow$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[\left(a^2+2ab+b^2\right)-\left(c^2-2cd+d^2\right)\right].\left[\left(c^2+2cd+d^2\right)-\left(a^2-2ab+b^2\right)\right]}\Rightarrow$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right].\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]}\Rightarrow$$

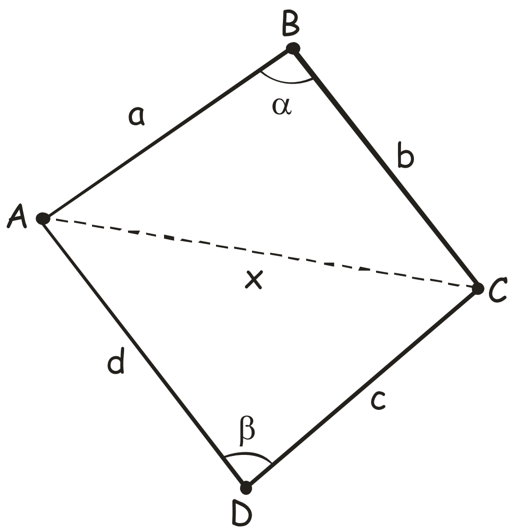
$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.(a+b+c-d).(a+b-c+d).(-a+b+c+d).(a-b+c+d)}\Rightarrow$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.2.(p-d).2.(p-c).2.(p-a).2.(p-b)}\Rightarrow$$

$$(ABCD)=\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)}$$

2.QUADRILÁTERO QUALQUER.

Consideremos um quadrilátero qualquer conforme ilustra a figura abaixo:



I.Acompanhe os seguintes passos:

i) Fazendo $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ temos então $2\theta = \alpha + \beta$

ii) Na figura acima é fácil ver que :

$$\Delta ABC \Rightarrow (ABC) = \frac{1}{2}.a.b.sen\alpha$$

$$\Delta ACD \Rightarrow (ACD) = \frac{1}{2}.c.d.sen\beta$$

Logo

$$(ABCD) = (ABC) + (ACD) = \frac{1}{2}.a.b.sen\alpha + \frac{1}{2}.c.d.sen\beta \Rightarrow 2.(ABCD) = a.b.sen\alpha + c.d.sen\beta \Rightarrow$$

$$[2.(ABCD)]^2 = (a.b.sen\alpha + c.d.sen\beta)^2 \Rightarrow$$

$$4.(ABCD)^2 = a^2.b^2.sen^2\alpha + 2a.b.c.d.sen\alpha.sen\beta + c^2.d^2.sen^2\beta \quad (*)$$

iii) Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABC e ACD obtemos $\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \end{cases}$. Donde segue que :

$$2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \Rightarrow$$

$$ab\cos\alpha - cd\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2} \Rightarrow$$

$$\left(ab\cos\alpha - cd\cos\beta\right)^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} \Rightarrow$$

$$a^2b^2\cos^2\alpha - 2a.b.c.d.\cos\alpha.\cos\beta + c^2d^2\cos^2\beta = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} \quad (**)$$

II. Cálculo do área

Adicionando as igualdades (*) e (**) obtemos:

$$a^2.b^2 - 2a.b.c.d.(\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta) + c^2.d^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} + 4.(ABCD)^2$$

Mas, $\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha+\beta)$. Lembre que definimos anteriormente $2\theta = \alpha+\beta$. Assim $\cos(\alpha+\beta) = \cos(2.\theta) = 2.\cos^2\theta - 1$. Logo

$$a^2.b^2 - 2a.b.c.d.\cos(\alpha+\beta) + c^2.d^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} + 4.(ABCD)^2 \Rightarrow$$

$$a^2.b^2 - 2a.b.c.d.\cos(2.\theta) + c^2.d^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} + 4.(ABCD)^2 \Rightarrow$$

$$a^2.b^2 - 2a.b.c.d.\left(2.\cos^2\theta - 1\right) + c^2.d^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} + 4.(ABCD)^2 \Rightarrow$$

$$a^2.b^2 - 4.a.b.c.d.\cos^2\theta - 2a.b.c.d + c^2.d^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} + 4.(ABCD)^2 \Rightarrow$$

$$(ab-cd)^2 - 4.a.b.c.d.\cos^2\theta = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} + 4.(ABCD)^2 \Rightarrow \ \div 4$$

$$(ABCD)^2 = \frac{(ab-cd)^2}{4} - \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)}{16} - a.b.c.d.\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$(ABCD)^2 = \underbrace{\frac{(2ab-2cd)^2 - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)}{16}}_{\text{veja a demonstração do quadrilátero inscritível}} - a.b.c.d.\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$(ABCD)^2 = (p-a).(p-b).(p-c).(p-d) - a.b.c.d.\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$(ABCD) = \sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d) - a.b.c.d.\cos^2\theta}\,.$$