Notas de Aula

A SEQÜÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa (1180-1250)

1. INTRODUÇÃO

Fibonacci - que significa filho de Bonacci- era o pseudônimo de Leonardo de Pisa, que é considerado o maior matemático da Idade Média. Como mercador, viajou pelo Oriente. No seu regresso, escreveu os livros *Liber Abaci* (1202) e *Practica Geometricae* (1220). No primeiro livro, descreveu fatos de aritmética e álgebra recolhidos durante sua viagem. No segundo, descreveu o que tinha descoberto na geometria e na trigonometria, [3] página 138.

O Liber Abaci foi um veículo que permitiu difundir na Europa ocidental o sistema de numeração indo-árabe, que era usado ocasionalmente já alguns séculos antes de Leonardo de Pisa, e que foi trazido pelos mercadores, embaixadores, eruditos, peregrinos e soldados vindo da Espanha e do Oriente, [3] página 139.

Fibonacci ficou conhecido entre nós não exatamente por seus livros, mas porque no século XIX o matemático francês F. Edouard A. Lucas, na sua coleção *Récreations mathématique* (4 volumes, Gauthier-Villars,Paris 1891-1896 ; reeditado em Paris 1960), ligou o nome de Fibonacci à sequência que aparece num problema do livro Liber Abaci. O problema, relacionado com o número de casais de coelhos obtidos a partir de um único casal, era :

Quantos casais de coelhos podem ser produzidos a partir de um único casal durante um ano se:

(a) cada casal originar um novo casal em cada mês, o qual se torna fértil a partir do segundo mês ;
(b) não ocorrerem mortes ?

Nessas condições, um casal nasce no primeiro mês, totalizando-se assim 2 casais. Durante o segundo mês, o casal original produz um novo casal. Um mês depois, o casal original e o que nasceu imediatamente após o seu acasalamento, produzem novos casais. Nessa altura, já existem 3 casais adultos e dois casais filhotes. E assim por diante. Veja o quadro abaixo :

Mês	Casais Adultos	Casais Jovens	TOTAL
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	2	5
4	5	3	8
5	8	5	13
6	13	8	21
7	21	13	34
8	34	21	55

A seqüência de Fibonacci é constituída pelos totais de casais, isto é, os números

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

Algumas questões:

-É possível encontrar uma fórmula simples para a soma dos n primeiros termos da seqüência de Fibonacci?
- É possível encontrar uma relação simples entre os termos da seqüência de Fibonacci?
- Que relação existe entre os termos consecutivos da seqüência de Fibonacci?
- Existe uma fórmula para descrever os termos da seqüência de Fibonacci?

Essa e outras questões serão abordas na próxima seção.

2. PROPRIEDADES ELEMENTARES

2.1 . A Igualdade Fundamental

Vamos denotar os números da seqüência de Fibonacci por:

$f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$, $f_7 = 13$, ...

Com essa notação, a seqüência de Fibonacci exibe uma propriedade interessante:

$$f_3 = f_1 + f_2 \;; \quad f_4 = f_2 + f_3; \quad f_5 = f_3 + f_4; \quad f_6 = f_4 + f_5$$

De uma maneira geral, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$. Isto é, cada termo da seqüência, a partir do terceiro, é a soma dos dois imediatamente inferiores. Desse modo, descreve-se a seqüência de Fibonacci como uma *seqüência recursiva*, ou seja, uma seqüência na qual todo termo pode ser representado como uma combinação linear dos termos precedentes. Isto é,

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n \geq 3.$$

A seqüência de Fibonacci é a primeira seqüência recursiva conhecida na literatura matemática (Por volta de 1634, a partir dos trabalhos de Albert Girard [1], página 287).

2.2. A Soma dos primeiros n termos da seqüência de Fibonacci

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

Prova : Começamos escrevendo a igualdade fundamental

$$f_{k+2} = f_k + f_{k+1}.$$

Daí segue que $f_k = f_{k+2} - f_{k+1}$. Agora, fazendo $k = 1, 2, 3, 4,\ldots,n$ e somando termo a termo, obtemos

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = (f_3 - f_2) + (f_4 - f_3) + (f_5 - f_4) + \ldots + (f_{n+2} - f_{n+1}) =$$

$$= f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1.$$

2.3. Os Termos Consecutivos São Relativamente Primos

Observando-se os números iniciais da seqüência de Fibonacci, podemos notar que termos consecutivos (f_1 e f_2; f_2 e f_3; f_3 e f_4; assim por diante) são relativamente primos (i.e. têm Máximo Divisor Comum igual a 1).

Isso se verifica para todo n ? Isto é , f_n e f_{n-1} são relativamente primos ?

A resposta é afirmativa:

Teorema 1

Na seqüência de Fibonacci, MDC $(f_n, f_{n-1}) = 1$, para todo $n \geq 1$.

Prova :
O caso em que n for igual a 1 ou 2 é trivialmente verdadeiro. Para $n \geq 3$, faremos por redução ao absurdo. Suponha que MDC(f_n, f_{n-1}) seja um inteiro d maior do que 1. Nesse caso, d divide f_n e d divide f_{n-1}. Como $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$, segue que d divide f_{n-2}. Do fato de que $f_{n-2} = f_{n-1} + f_{n-3}$, segue que d divide f_{n-3}. Prosseguindo-se deste modo, d dividirá $f_1 = 1$. Contradição. Logo MDC$(f_n, f_{n-1}) = 1$.

Outra questão: Como $f_3 = 2$, $f_5 = 5$, $f_7 = 13$ e $f_{11} = 89$ são todos primos, f_n é primo sempre que n é primo ?

A resposta é não. Para ilustrar, veja o contra-exemplo :
$f_{19} = 4181 = 37 \times 113$. Você é capaz de encontrar um outro contra-exemplo ?

Não se conseguiu ainda determinar quais são todos os n para os quais f_n é primo. Você pode resolver esse problema e tornar-se um matemático famoso! Também não se sabe ainda se o número de primos na seqüência de Fibonacci é infinito. Esse é outro problema intrigante !

2.4. O Algorítmo de Euclides e a Seqüência de Fibonacci

É um fato conhecido: o Máximo Divisor Comum de dois inteiros positivos pode ser calculado a partir do algorítmo de Euclides, depois de um número finito de divisões. Por exemplo, para calcular o MDC(32,12) começamos dividindo 32 por 12 :
$32 = 2 \times 12 + 8$, onde 8 é o resto da divisão e 2 é o quociente.
Em seguida, fazemos a divisão do quociente pelo resto da divisão anterior: $12 = 1 \times 8 + 4$. Finalmente, dividimos 8 por 4: $8 = 2 \times 4 + 0$. Como o resto da última divisão é zero, dizemos que MDC(32,12) = 4. Nesse caso, foi preciso 3 divisões para encontrarmos o Máximo Divisor Comum. Por uma escolha conveniente dos inteiros, o número de divisões pode ser arbitrariamente grande. Você é capaz de dar exemplos dessa situação ? Nessa altura, uma questão aparece naturalmente :

Dado um inteiro positivo n, existem inteiros positivos a e b tais que, para se calcular MDC(a,b) usando o algorítmo de Euclides necessita-se de exatamente n divisões ?

A resposta é afirmativa e foi dada, em 1844, por Gabriel Lamé (1725-1871), um matemático francês. Lamé, ao responder a questão, descobriu uma surpreendente ligação entre os números de Fibonacci e o algorítmo de Euclides. A resposta foi dada tomando $a = f_{n+2}$ e $b = f_{n+1}$. Nesse caso, o uso do Algorítmo de Euclides para a obtenção do MDC(f_{n+2}, f_{n+1}) leva-nos ao sistema de equações :

$$f_{n+2} = 1 \times f_{n+1} + f_n$$

$$f_{n+1} = 1 \times f_n + f_{n-1}$$
$$f_n = 1 \times f_{n-1} + f_{n-2}$$
....
$$f_4 = 1 \times f_3 + f_2$$
$$f_3 = 2 \times f_2 + 0$$

Do sistema de equações acima, fica claro que MDC(f_{n+2}, f_{n+1}) = f_2 = 1 e que o número de divisões é n.

Uma conseqüência surpreendente :

O número de divisões necessárias para achar o Maior Divisor Comum de dois inteiros positivos, usando o algorítmo de Euclides, não excede a cinco vezes o número de algarismos (na base decimal) do menor dos números

De fato, sejam *a* e *b* esses números, com $a \leq b$, e *a* possuindo k algarismos na base dez. Nesse caso, $a < 10^k$. Usando o algorítmo de Euclides para calcular o MDC(a,b), necessitamos de n divisões, então $a \geq f_{n+1}$. Portanto, temos $10^k > f_{n+1}$

Usando indução podemos mostrar que $f_m > (8/5)^{m-2}$, para todo $m > 2$, e, portanto, segue que $10^k > (8/5)^{n-1}$

Elevando cada lado a potência 5 obtemos: $10^{5k} > [(8/5)^5]^{n-1} > 10^{n-1}$

Assim, $5k > n-1$, e, como k é inteiro, $n \leq 5k$, como queríamos.

Sobre essa questão uma interessante referência em português é [2].

Um fato interessante a respeito da seqüência de Fibonacci é que os termos satisfazem a identidade :

$$f_{m+n} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}$$

Por exemplo, para calcular f_9 basta aplicar a identidade :

$f_9 = f_{6+3} = f_5 f_3 + f_6 f_4 = 5 \times 2 + 8 \times 3 = 34$. Mas, como saber se a identidade acima é válida para todo inteiro m e n ? Para responder a essa questão vamos fazer uma prova da veracidade da identidade. Provaremos por indução sobre n. Para isso, fixemos m. Se n = 1, a identidade torna-se $f_{m+1} = f_{m-1} f_1 + f_m f_2 = f_{m-1} .1 + f_m .1 = f_{m-1} + f_m$,

que é verdadeira, por ser a relação fundamental da seqüência de Fibonacci. Suponha que a identidade acima seja verdadeira quando n é um dos inteiros 1, 2, 3, 4,..., k. Assim, tem-se: $f_{m+k} = f_{m-1} f_k + f_m f_{k+1}$ e também $f_{m+(k-1)} = f_{m-1} f_{k-1} + f_m f_k$

Somando-se as duas igualdades e aplicando-se a igualdade fundamental mostra-se que $f_{m+(k+1)} = f_{m-1} f_{k+1} + f_m f_{k+2}$. O que conclui a prova.

2.5 . O Teorema de F.E.A. Lucas

Em 1876, F. Edouard A. Lucas provou que o Máximo Divisor Comum de dois números de Fibonacci era um outro número de Fibonacci. Mais precisamente,

$$\text{MDC}(f_m, f_n) = f_{\text{MDC}(m,n)}.$$

Antes de demonstrarmos o Teorema de Lucas, vamos provar os seguintes lemas:

Lema 1
Para m,n inteiros maiores do que ou iguais a 1, temos que f_{mn} é divisível por f_m.

Prova : A prova é por indução sobre n. Para $n = 1$ o resultado é verdadeiro, pois $f_{mn} = f_m$. Suponha que para $n = 1, 2, 3 ..., k$, f_{mn} seja divisível por f_m. O caso $(n+1)$ é verificado usando a fórmula fundamental: $f_{m(k+1)} = f_{mk-1} f_m + f_{mk} f_{m+1}$
Como, por hipótese de indução, f_m divide f_{mk}, o lado direito da expressão acima é divisível por f_m, e, portanto, $f_{m(k+1)}$ é divisível por f_m.

Lema 2
Se m e n são inteiros positivos $(m \geq n)$ com $m = qn + r$, $0 \leq r < n$, então $\text{MDC}(f_m, f_n) = \text{MDC}(f_n, f_r)$.

Prova: Pela igualdade fundamental temos : $\text{MDC}(f_m, f_n) = \text{MDC}(f_{qn+r}, f_n) = \text{MDC}(f_{qn-1} f_r + f_{qn} f_{r+1}, f_n)$. Usando o Lema 1 e o fato de que $\text{MDC}(a+b, c) = \text{MDC}(a, c)$, sempre que c dividir b, temos: $\text{MDC}(f_{qn-1} f_r + f_{qn} f_{r+1}, f_n) = \text{MDC}(f_{qn-1} f_r, f_n)$
Agora vamos mostrar que $d = \text{MDC}(f_{qn-1}, f_n) = 1$. As relações d divide f_n e f_n divide f_{qn} implicam que d divide f_{qn}, portanto d é um inteiro positivo que divide dois termos consecutivos, f_{qn} e f_{qn-1}, da seqüência de Fibonacci. Logo $d = 1$. Por outro lado,

$$\text{MDC}(f_m, f_n) = \text{MDC}(f_{qn-1} f_r, f_n) = \text{MDC}(f_r, f_n)$$

A última igualdade decorre do fato: sempre que $\text{MDC}(a,b) = 1$, temos $\text{MDC}(a, bc) = \text{MDC}(a,c)$. O que finaliza a prova.

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema Lucas: $\text{MDC}(f_m, f_n) = f_{\text{MDC}(m, n)}$.

Suponha que $m \geq n$. Aplicando o algoritmo de Euclides para m e n, obtemos o seguinte sistema de equações :

$$\begin{aligned}
m &= q_1 n + r_1 , \quad 0 \leq r_1 \leq n \\
n &= q_2 r_1 + r_2 , \quad 0 \leq r_2 \leq r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 , \quad 0 \leq r_3 \leq r_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n , \quad 0 \leq r_n \leq r_{n-1}
\end{aligned}$$

$r_{n-1} = q_{n+1}r_n + 0$

De acordo com o Lema 2 temos

$$MDC(f_m, f_n) = MDC(f_n, f_{r_1}) = ... = MDC(f_{r_n}, f_{r_{n-1}})$$

Como r_n divide r_{n-1} o Lema 1 garante que f_{r_n} divide $f_{r_{n-1}}$, portanto $MDC(f_{r_{n-1}}, f_{r_n}) = f_{r_n}$. Mas, r_n sendo o último resto não nulo no Algorítmo Euclides para m e n, ele é o MDC(m, n). O que encerra a prova.

2.6. A Fórmula de Binet

A questão:

Existe uma fórmula geral que expresse o n-ésimo termo da seqüência de Fibonacci?

tem resposta afirmativa e a fórmula foi descoberta em 1718 pelo matemático francês De Moivre. Mas, a fórmula ficou conhecida pelo nome de *Fórmula de Binet*, em homenagem ao matemático francês que a resdescobriu mais de um século depois (1843).

Antes de apresentarmos a fórmula de Binet, vamos fazer algumas observações. A seqüência de Fibonacci não é a única seqüência que satisfaz a fórmula recursiva

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \qquad (*)$$

De fato, a chamada seqüência de Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... também satisfaz a relação (*). Na verdade, existem uma infinidade de seqüências satisfazendo a relação (*). O lema seguinte mostra como podemos produzir novas soluções de (*).

Lema 3
(a) Se $A = (a_1, a_2, a_3,...)$ é uma seqüência solução de (*) e se c é um número real qualquer, então a seqüência $cA = (ca_1, ca_2, ca_3,...)$ é também solução de (*).
(b) Se as seqüências $A = (a_1, a_2, a_3,...)$ e $B = (b_1, b_2, b_3,...)$ satisfazem (*), então a soma $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ...)$ também satisfaz a relação (*).

Prova : Exercício

Fórmula de Binet. O n-ésimo termo da seqüência de Fibonacci é dado pela fórmula

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(É interessante observar que uma seqüência extremamente fácil de definir recursivamente tenha, para cada termo, uma fórmula complicada. Observe que: a*pesar de não ser fácil visualizar, o lado direito da fórmula acima é um inteiro!)*

Prova da fórmula de Binet.

Observe que , se r é a raiz positiva da equação $x^2 = x + 1$, então $r = (1 + \sqrt{5})/2$. Assim, temos que $r^2 = r + 1$. Multiplicando cada lado por r^n obtemos $r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$ para todo n = 1, 2, 3, 4,.... Assim, $(r, r^2, r^3, \ldots)$ é uma seqüência satisfazendo (*).
Seja $u = 1 - r$ a outra solução da equação $x^2 = x + 1$. Logo, $(u, u^2, u^3, \ldots)$ é uma seqüência satisfazendo (*). Pelo Lema 3, a seqüência $(r-u,\ r^2-u^2,\ r^3-u^3, \ldots)$ satisfaz (*). Mas os dois primeiros termos (como r e u são soluções de $x^2 = x + 1$) são iguais, pois

$$r^2 - u^2 = (r - u)(r + u) = 1.(r - u) = r - u,$$

e, portanto, a seqüência $\dfrac{r^n - u^n}{r - u}$, para n = 1, 2, 3, ...

tem de ser a seqüência de Fibonacci. Logo, $\dfrac{r^n - u^n}{r - u}$ é exatamente o valor da fórmula de Binet. Isso conclui a prova.

Observe, a partir da fórmula de Binet, que f_n é aproximadamente igual a $\dfrac{r^n}{\sqrt{5}}$, com erro absoluto tendendo a zero quando n tende ao infinito.
De fato,

$$\left| f_n - \frac{r^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|1 - r^n|}{\sqrt{5}} \to 0$$

porque $|1 - r| < 1$. Então os números de Fibonacci crescem exponencialmente e, quando n cresce, eles se aproximam dos termos de progressão geométrica

$$\frac{r}{\sqrt{5}}, \frac{r^2}{\sqrt{5}}, \frac{r^3}{\sqrt{5}}, \ldots$$

O número r, solução positiva da equação $x^2 = x + 1$, é chamado *razão áurea.*

3. Representação de Números Naturais Como Soma de Números de Fibonacci

Um fato surpreendente (ver [5] e [1] pag. 297) :

Teorema
Todo número natural N pode ser escrito como uma soma finita de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.

Prova : Por indução sobre N. Para N = 1, 2, 3, 4, 5 temos:

$1 = f_1$
$2 = f_2$
$3 = f_3 + f_1$
$4 = f_3 + f_1$
$5 = f_5$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para todo número natural inferior a f_n . Isto é, cada um dos números naturais 1, 2, 3, 4, ..., k, com $k = f_n - 1$, pode ser escrito como uma soma finita de números de Fibonacci distintos e não consecutivos do conjunto $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}\}$. Vamos mostrar que a afirmação é verdadeira para todos os números naturais inferiores a f_{n+1}. Seja N tal que $f_n \leq N < f_{n+1}$ e f_n o maior termo na representação de N como soma de números de Fibonacci. Quando $N > f_n$, podemos escrever $N = f_n + r$. Neste caso,

$$r = N - f_n < f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$$

Portanto, pela hipótese de indução, r pode ser representado como uma soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos pertencentes ao conjunto $\{ f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}\}$. Desse modo, N, e, como conseqüência, cada um dos inteiros 1, 2, 3,..., $f_{n+1} - 1$ pode ser expresso como uma soma de números, distintos e não consecutivo, do conjunto $\{ f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n\}$, pois na representação de N não existirá mais o termo f_{n-1} dentre os termos da representação de r e o termo f_n. O que completa a indução e a prova.

Para exemplificar, $N = 118 = 89 + 21 + 8 = f_{10} + f_7 + f_5$.

Uma questão ocorre naturalmente : *todo número natural é escrito de maneira única como soma de números de Fibonacci?*

Para responder essa questão, vamos supor que dado N, a representação de N como soma de números de Fibonacci, colocados em ordem decrescente, seja

$$N = f_n + f_p + f_q + ... + f_z$$

onde f_n é o maior número de Fibonacci nessa representação. E vamos supor também que exista uma outra representação de N, com os números de Fibonacci colocados em ordem decrescente. Como $f_n \leq N < f_{n+1}$, então $f_{n+1} > N$, e portanto, com maior razão, os termos f_m com $m > n+1$. Assim, na outra representação de N, o maior termo é também f_n. Por outro lado, a maior soma de termos não consecutivos e inferiores a f_n é ela própria inferior a f_n. De fato, ou n é ímpar e esta soma não é superior a $f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + ...+ f_3 = f_n - f_2$, ou n é par e esta soma não é superior a $f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + ...+ f_2 = f_n - f_1 = f_n - f_2$,
Como, por hipótese, existe duas maneiras de escrever o número N como soma de números de Fibonacci, deve existir duas maneiras distintas de escrever o número $r = N - f_n = f_p + f_q + ... + f_z$ Como $f_p \leq r < f_{p+1}$, usando o mesmo raciocínio, na representação de r, f_p será necessariamente o termo maior. Prosseguindo deste modo, os outros termos serão todos iguais. Portanto, N será representado por uma única soma de números de Fibonacci não consecutivos e em orden decrescente.

4. A Fórmula de Lucas para f_n

Os coeficientes do Binômio de Newton (Isaac Newton-1642-1727) $(x + y)^n$ onde n é um número natural, são os (n+1) inteiros

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, ..., n$$

O *triângulo de Pascal* (Blaise Pascal- 1623-1662) é formado a partir desses números, fazendo n = 0, 1, 2, ... e k variando de 0 a n, e colocando-se esses números como segue :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....

Se nós olharmos para o triângulo de Pascal, agora formando um triângulo retângulo, vamos ver que, surpreendentemente, aparecem aí os números de Fibonacci ([4] pag.135) :

						Soma das diagonais
1						1
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		5
1	5	10	10	5	1	8

Em 1876, F. Edouard A. Lucas descobriu a seguinte fórmula para os termos de Fibonacci empregando os coeficientes binomiais:

Teorema (Lucas)

$$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-j}{j},$$

onde j é o maior inteiro menor do que ou igual a n/2.

Prova : Por indução sobre n. É fácil ver para os casos n = 0, 1, 2. Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para os inteiros 0, 1, 2, 3, ..., k-1. Da identidade fundamental e da hipótese de indução temos :

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \left[\binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \ldots + \binom{k-j-1}{j}\right] +$$

$$+ \left[\binom{k-2}{0} + \binom{k-3}{1} + \binom{k-4}{2} + \ldots + \binom{k-j-1}{j-1}\right]$$

que pode ser reescrito como $f_{k+1} =$

$$\binom{k-1}{0}+\left[\binom{k-2}{1}+\binom{k-2}{0}\right]+\left[\binom{k-3}{2}+\binom{k-3}{1}\right]+\ldots+\left[\binom{k-j-1}{j}+\binom{k-j-1}{j-1}\right]$$

Agora, aplicando a relação $\binom{m}{i}=\binom{m-1}{i}+\binom{m-1}{i-1}$, obtemos f_{k+1}

$$=\binom{k-1}{0}+\binom{k-1}{1}+\binom{k-2}{2}+\binom{k-3}{3}+\ldots+\binom{k-j}{j}$$

Para concluir a prova, basta observar que a primeira parcela da soma acima é igual a seguinte expressão : $\binom{k}{0}$, para $k > 1$.

5. **A Razão Áurea**

Considere a razão $r_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, n = 1, 2, 3, 4, ..., entre os números de Fibonacci consecutivos. A seqüência r_n :

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},\ldots.$$

possui *propriedades fascinantes*:

(i) os termos de ordem par são decrescentes: $r_2 > r_4 > r_6 > r_8 > r_{10} > \ldots.$

(ii) os termos de ordem ímpar são crescentes: $r_1 < r_3 < r_5 < r_7 < r_9 < \ldots.$

(iii) os termos consecutivos aparecem em ordem alternada: $r_1 < r_2$, $r_2 > r_3$, $r_3 < r_4$, $r_4 > r_5$,...

(iv) a seqüência dos intervalos fechados: $[r_1, r_2]$, $[r_3, r_4]$, $[r_5, r_6]$, $[r_7, r_8]$,.... é *encaixante*, isto é, cada um está inteiramente contido no anterior: $[r_1, r_2] \supseteq [r_3, r_4] \supseteq [r_5, r_6] \supseteq [r_7, r_8] \supseteq$ ....
Além disso, o limite dos comprimento desses intervalos tende a zero quando n tende ao infinito. De fato, pela identidade de Cassini (exercício Nº 2) temos

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}}$$

que tende para zero quando n tende para infinito.
O *Princípio dos Intervalos Encaixantes* (estudado na Análise Real) afirma :

Se I_1, I_2, I_3, ... é uma seqüência de intervalos fechados e limitados, e se o comprimento de I_n tende a zero quando n tende ao infinito, então existe um, e somente um, número real que pertence a todos os intervalos da seqüência.

O Princípio dos Intervalos Encaixantes afirma, em outras palavras, que o sistema de números reais é *completo*, isto é, sem furo ou brecha ou lacuna.
No caso da seqüência de intervalos fechados definidos acima, concluímos que existe um número real L comum a todo intervalo fechado

$$[r_{2n-1}, r_{2n}], \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, ...$$

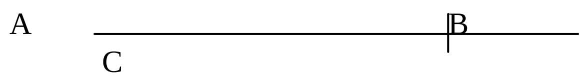
e, portanto, $L = \lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$

Sabendo-se que $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ e dividindo-se ambos os lados por f_{n+1} temos: $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$

Agora, fazendo o limite quando n tende ao infinito, obtemos: $L = 1 + \frac{1}{L}$

Portanto, L é a raiz positiva da equação $L^2 = L + 1$, ou seja $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é a *razão áurea* - costumeiramente denotada por τ - e que já havíamos encontrado antes quando estudamos a fórmula de Binet para os números de Fibonacci. Uma aproximação: $\tau = 1{,}6180....$

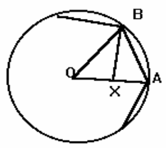
A razão áurea tem origem na antiguidade cássica. Euclides (matemático grego, diretor do famoso Museu de Alexandria e autor de "Os Elementos") chamou-a de "*média e extrema razão*", que significa a razão obtida quando um segmento de reta está dividido em duas partes desiguais de modo que a razão do todo para o mais largo é igual a razão da maior para a menor :



$$\tau = \frac{AB}{AC} = \frac{AC+CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + \frac{1}{t}$$

Na Renascença, a razão áurea era chamada *a divina proporção.*

A construção clássica de um polígono regular usando somente as ferramentas proposta por Euclides, a régua sem marcação e o compasso, depende da divisão de um segmento de reta na razão $\tau : 1$. Vamos explicar esse fato. Observe inicialmente que para construir um pentágono regular é suficiente construirmos um decágono regular inscrito num circulo, pois o pentágono pode ser formado conectando os vértices alternadamente. Seguindo o método dos gregos antigos, suponha que o decágono já está construído -portanto o ângulo central AOB, na figura abaixo, mede $\pi/5$ .Seja X o ponto sobre o raio OA tal que BX é a bissetriz do ângulo OBA. Como o triângulo OBA é isósceles, os ângulos da base medem $1/2(\pi-\pi/5) = 2\pi/5$. E



portanto, o ângulo OBX mede $\pi/5$. O ângulo AXB, que é externo, mede $\pi/5 + \pi/5 = 2\pi/5$. Logo, os triângulos ABX e OBX são também isósceles. Portanto : OX = BX = AB.
Tomando o raio do círculo medindo 1, o lado do decágono AB = x, e como os triângulos ABO e ABX são semelhantes, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Portanto, o ponto X divide o raio em média e extrema razão. Segue que

$$x = \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Como o segmento de comprimento $\sqrt{5}$ pode ser construído, usando somente a régua e o compasso, também podemos construir o lado do decágono.

Exercícios

1) Mostre que a soma dos quadrados dos primeiros n números de Fibonacci é igual a $f_n f_{n+1}$.

2) Demonstre a identidade de Cassini: o quadrado de qualquer termo da seqüência de Fibonacci difere do produto dos termos adjacentes por 1 ou -1 :

$$f_{n-1}\, f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

[Sugestão : Em vez de fazer contas, verifique o resultado surpreendente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

e use o fato de que para duas matrizes quadradas A e B, de mesma ordem, tem-se det(AB) = det(A).det(B)]

Nota : Jean-Dominique Cassini descobriu essa identidade em 1680, veja J.D. Cassini, *Une nouvelle progression de nombres,* Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Paris, 1 (1733) 496-201.

3) Mostre que a soma $f_n^2 + f^2_{n+1}$ é sempre um número de Fibonacci.

4) Mostre que a diferença $f^2_{n+1} - f^2_{n-1}$ é sempre um número de Fibonacci.

5) Mostre que $f_1\, f_2 + f_2\, f_3 + \ldots + f_{2n-1}\, f_{2n} = f^2_{2n}$

6) Encontre fórmulas simples para as somas

(a) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1}$

(b) $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n}$

7) De quantas maneiras é possível subir uma escada com n degraus pisando em um ou dois degraus de cada vez ?

8) Ache o número possível de seqüências de 0's e 1's, de comprimento n, tais que não pode ter dois zeros consecutivos.

9) Prove que :

(a) se 2 divide f_{n+1} então 4 divide $(f_n^2 - f_{n-1}^2)$

(b) se 3 divide f_n, então 9 divide $(f_{n+1}^3 - f_{n-1}^3)$

10) Calcule :
(a) MDC (f_9, f_{12})
(b) MDC (f_{15}, f_{20})
(c) MDC (f_{24}, f_{36})

11) Ache os números de Fibonacci que dividem f_{24} e f_{36}.

12) Verificar que :
(a) 2 divide f_n se, e somente se, 3 divide n.
(b) 3 divide f_n se, e somente se, 4 divide n.
(c) 4 divide f_n se, e somente se, 6 divide n.
(d) 5 divide f_n se, e somente se, 5 divide n.

13) Represente os números 50, 75, 100 e 125 como soma de números de Fibonacci.

14) Prove que : $(f_n\, f_{n+3})^2 + (2f_{n+1}\, f_{n+2})^2 = (f_{2n+3})^2$ e use isso para gerar 5 triplas Pitagóricas.

15) Prove que o produto $f_n\ f_{n+1}\ f_{n+2}\ f_{n+3}$, de quaisquer quatro números de Fibonacci consecutivos, é igual a área de um triângulo retângulo de lados inteiros (triângulo pitagórico).

16) Mostre que para todo inteiro positivo n, $\tau^n = \tau\, f_n + f_{n-1}$ (defina f_0 = o). Use esta relação para dar uma outra prova da fórmula de Binet.

BIBLIOGRAFIA

[1] BURTON, DAVID M., Elementary number theory, Allyn Bacon and Bacon, Inc, 1976

[2] de CARVALHO, JOÃO. B. P., Euclides, Fibonacci e Lamé, RPM- SBM, No. 24, 1993, 32-40

[3] STRUICK, DIRK, J., História Concisa das Matemáticas, Gradiva, 1989

[4] YOUNG, ROBERT M., Excursions Calculus : An Interplay of The Continous and the Discrete, Dolciani Mathematical Exposition, MAA, 1992

[5] ZECKENDORF, E., Representation des nombres natureals par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, Bull. de la Soc. Royale des Sci. de Liege, 41 (1972) 179-182