E as funções sobrejetoras?

Carlos A. Gomes
Natal, RN

É bastante comum encontrarmos nos textos básicos de análise combinatória o problema do cálculo do número de funções $f: A \to B$, onde A e B são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente. Quando $m \leq n$ não é raro encontrarmos o problema correspondente ao cálculo do número de funções injetoras de A em B e também é fato quase que obrigatório encontrarmos nos textos básicos o problema do cálculo do número de bijeções de A em B, quando m=n (é claro!). Agora quando $m \geq n$ é bastante raro, nos textos básicos, encontrarmos o problema do cálculo do número de funções sobrejetoras de A em B. Além disso nos textos avançados (que geralmente não estão disponíveis para todos e mesmo quando estão não encontram-se em português, o que muitas vezes é um obstáculo a mais) a solução desse problema faz uso do princípio da exclusão e inclusão que para um aluno do ensino médio pode ser um fato desconhecido em sua forma mais geral, visto que neste nível o aluno conhece esse princípio apenas para dois conjuntos finitos e a solução do referido problema exige o conhecimento do referido princípio para k conjuntos finitos. Dentro desse contexto apresentaremos uma maneira intuitiva de estabelecer o cálculo do número de funções sobrejetoras, o que neste nível de aprendizagem é, ao meu ver bastante satisfatório (Se bem que implicitamente estaremos usando o princípio da inclusão e exclusão)

Revisando alguns conceitos básicos

1. **Princípio fundamental da contagem**

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de x maneiras distintas e uma vez tomada a decisão D_1, uma decisão D_2 puder ser tomada de y maneiras distintas, então a quantidade de maneiras distintas de tomar as decisões D_1 e D_2 sucessivamente é x.y

2. **A quantidade de funções definidas entre dois conjuntos finitos.**

Dados $A=\{a_1, a_2, a_3,..., a_m\}$ e $B=\{b_1, b_2, b_3,..., b_n\}$ quantas são as funções $f:A\to B$?

Ora, definir uma função $f:A\to B$ consiste em escolher um valor (uma imagem), no conjunto B, para cada um dos elementos de A, ou seja, determinar $f(a_1), f(a_2), f(a_3),..., f(a_m)$, mas isto pode ser feito de n^m modos distintos pois para cada um dos $f(a_i)$ com i =1, 2, 3, ... , m temos:

$$\begin{array}{ccccc} f(a_1), & & f(a_2), & \cdots & f(a_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n\ possibilidades & & n possibilidades & \ldots & n possibilidades \end{array}$$

pelo princípio fundamental da contagem temos que existem $n.n.n. ...n=n^m$ funções $f:A\to B$.

3. **A quantidade de funções injetoras definidas entre dois conjuntos finitos.**

Dados $A=\{a_1, a_2, a_3,..., a_m\}$ e $B=\{b_1, b_2, b_3,..., b_n\}$ quantas são as funções injetoras $f:A\to B$?

É claro que só existem funções injetoras de A em B quando m ≤ n. Bem, neste caso $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$,..., $f(a_m)$ devem assumir valores distintos. Usando o princípio fundamental da contagem existem n.(n-1).(n-2). ... (n-m+1) = $\frac{n!}{(n-m)!}$ funções injetoras de A em B, pois

$$\begin{array}{ccccc} f(a_1), & & f(a_2), & \ldots & f(a_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n\ possibilidades & & (n-1)\ possibilidades & \ldots & (n-m+1)\ possibilidades \end{array}$$

pelo princípio fundamental da contagem existem n.(n-1).(n-2). ... (n-m+1) = $\frac{n!}{(n-m)!}$ funções injetoras de f:A→B.

4. A quantidade de funções bijetoras definidas entre dois conjuntos finitos.

Dados A={a_1, a_2, a_3,..., a_m} e B={b_1, b_2, b_3,..., b_n} quantas são as funções bijetoras f:A→B ?

É claro que só existem funções injetoras de A em B quando m = n. Bem. Neste caso usando o mesmo raciocínio do item anterior é imediato concluir que existem n ! bijeções de A em B

5. A quantidade de funções sobrejetoras definidas entre dois conjuntos finitos.

Dados A={a_1, a_2, a_3,..., a_m} e B={b_1, b_2, b_3,..., b_n} quantas são as funções sobrejetoras f:A→B ?

É claro que só existem funções injetoras de A em B quando m ≥ n. Bem aqui precisamos tomar mais cuidado, por isso vamos inicialmente examinar alguns casos particulares para estimular a nossa intuição.

Se A={a,b,c} e B={d,e} temos então 2^3 funções de A em B, onde apenas as funções constantes, a saber: f_1={(a,d),(b,d),(c,d)} e f_2={(a,e),(b,e),(c,e)} não são sobrejetoras. Então, neste caso, temos 2^3-2=6 funções sobrejetoras de A em B.

Sendo um pouquinho mais geral, se A={a_1, a_2, a_3,..., a_m} com m ≥ 2 e B={d,e} teremos 2^m funções de A em B, onde apenas as funções constante, a saber: f_1={(a_1,d),(a_2,d),...,(a_m,d)} e f_2={(a_1,e),(a_2,e),...,(a_m,e)} não são sobrejetoras. Então, neste caso, existem 2^m-2 funções sobrejetoras de A em B. Avançando mais um pouquinho, imaginemos que A={a,b,c,d} e B={e,f,g}. Neste caso teríamos 3^4 funções de A em B. Considerando os subconjuntos de B com 2 elementos (que são 3) teríamos 2^4 funções de A em cada um desses subconjuntos de B. Assim somos tentados a dizer que a quantidade de funções sobrejetoras de A em B é igual a $3^4 - 3.2^4 = 3^4 - \binom{3}{2}.2^4 = 33$, onde $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!.p!}$ (número binomial), mas devemos ter bastante cuidados pois as $\binom{3}{2}.2^4$ funções não são todas distintas, pois se tomarmos, por exemplo, o subconjunto {e,f} de B nas excluímos a função f_1={(a,e),(b,e),(c,e),(d,e)} duas vezes, a saber: Uma quando consideramos o subconjunto {e,f} e outra quando consideramos o subconjunto {e,g} de B, consequentemente no resultado $3^4 - 3.2^4 = 3^4 - \binom{3}{2}.2^4 = 33$ nós removemos duas vezes as funções constantes de A em {e{ , {f} e {g}. Assim, para ajustarmos o resultado devemos adicionar 3, ou seja, existem , neste caso, $3^4 - 3.2^4 = 3^4 - \binom{3}{2}.2^4 + \binom{3}{1}.1^4 = 36$ funções sobrejetoras de A em B. Sendo um pouquinho mais geral, se A={a_1, a_2, a_3,..., a_m} , com m ≥ 3 e B={d,e} é fácil , pelo raciocínio anterior concluir que existem $\binom{3}{3}.3^m - \binom{3}{2}.2^m + \binom{3}{1}.1^m$ funções sobrejetoras de A em B.

Os exemplos anteriores sugerem que se A fosse um conjunto com 5 elementos e B fosse um conjunto com 4 elementos existiriam $\binom{4}{4}.4^5 - \binom{4}{3}.3^5 + \binom{4}{2}.2^5 - \binom{4}{1}.1^5 = 240$ funções sobrejetoras de A em B. Mais geralmente, se A={a_1, a_2, a_3,..., a_m} e B={b_1, b_2, b_3,..., b_n} com m ≥ n então a quantidade de funções sobrejetoras de A em B é dada por:

$$\binom{n}{n}.n^m - \binom{n}{n-1}.(n-1)^m + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}.1^m = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

Referências

[01] Discrete and combinatorial Mathematics – An applied introduction. Ralph Grimaldi – ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY

[02] Introdução à análise combinatória, J. O. Plínio, Ed. Unicamp

[03] Análise combinatória e probabilidade, A. C. Morgado ... , SBM

[04] Mathematical of choice, Ivan Niven, MAA.