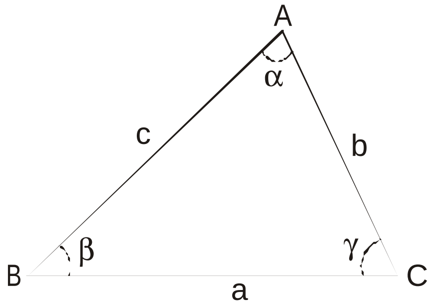
Você sabia que a lei dos cossenos é válida para os senos?

Carlos A. Gomes
Natal,RN

Como é ?! É isso mesmo! Veja: é fato bastante conhecido que num triângulo ABC qualquer é válida a lei dos cossenos, a saber:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.Cos a$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.Cos b$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.Cos g$$

Vamos mostrar que essa relação é preservada para os senos dos ângulos internos desse triângulo, ou seja:

$$Sen^2 a = Sen^2 b + Sen^2 g - 2Sen b.Sen g.Cos a$$
$$Sen^2 b = Sen^2 a + Sen^2 g - 2Sen a.Sen g.Cos b$$
$$Sen^2 g = Sen^2 a + Sen^2 b - 2Sen a.Sen b.Cos g$$

Com efeito, usando a também conhecida lei dos senos no triângulo ABC:

$\dfrac{a}{Sen a} = \dfrac{b}{Sen b} = \dfrac{c}{Sen g} = 2.R$ ou $a = 2.R.Sen a$, $b = 2.R.Sen b$, $c = 2.R.Sen g$ (R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo) e substituindo em $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.Cos a$, obtemos $Sen^2 a = Sen^2 b + Sen^2 g - 2Sen b.Sen g.Cos a$. As outras igualdades são obtidas de modo análogo.

Nota da RPM: As igualdades obtidas para os senos são conseqüência da semelhança entre os triângulos abaixo, decorrente da lei dos senos: