1) Se $x, y, z > 0$ prove que

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Solução:

É suficiente provar que

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x} \geq \frac{9}{2(x+y+z)}$$

Pela desigualdade de Schwarz

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x} \geq \frac{(1+1+1)^2}{(x+y)+(y+z)+(z+x)}$$

$o\ resultado\ segue\ imediatamente.$

2) Se a, b são números reais positivos, prove que $8(a^4+b^4) \geq (a+b)^4$.

Solução:

Pela desigualdade de Holder temos,

$$(1+1)(1+1)(1+1)(a^4+b^4) \geq (a+b)^4.$$

$o\ resultado\ segue\ imediatamente.$

3) Para a, b, c números reais positivos, prove a desigualdade

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

$solução$:

Por cauchy,

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ac+2bc}$$
$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)}$$

Resta provar que

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2$$
$$\geq ab+bc+ac$$

que é $verdadeiro\ e\ j$á $foi\ provado\ no\ texto.$

4) Se a, b, x, y, z são números reais positivos, prove que

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}.$$

Solução:

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}=\frac{x^2}{axy+bxz}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}$$
$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{(a+b)(xy+yz+zx)}=\frac{3}{a+b}.$$

$obs.$: fazendo $a=b=1$ temos o problema do cone sul 96 como corolário.

5) (Croácia-04) Se x, y, z são números reais positivos, prove que

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{3}{4}$$

Solução.

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}$$
$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+z^2)+8(xy+yz+zx)$$
$$\geq 3(x^2+y^2+z^2)+9(xy+yz+zx)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2$$
$$\geq xy+yz+zx$$

Que é verdadeiro.

6) Se $a, b, c > 0$ prove que

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{a^2+c^2}{a+c}\geq a+b+c.$$

Solução:

Temos que, por cauchy-schwarz

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{a+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)+(b+c)+(a+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}$$
$$=\frac{a+b+c}{2}\quad(I)$$

Analogamente,

$$\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{a+c}\geq\frac{a+b+c}{2}\quad(II)$$

Somando (I) e (II) temos o resultado requerido.

7) Se a, b, c são números reais positivos tais que $abc = 1$ prove que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Solução:

Por cauchy,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{1/a^2}{a(b+c)} + \frac{1/b^2}{b(a+c)} + \frac{1/c^2}{c(a+b)}$$
$$\geq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}$$
$$\geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

Na última utilizamos a desigualdade já provada

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

E o fato de que $abc = 1$.

8) Se $x, y, z > 0$ prove que

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geq \frac{1}{2}$$

Solução:

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y}$$
$$= \frac{x^2}{x^2+2xy+3zx} + \frac{y^2}{y^2+2yz+3xy} + \frac{z^2}{z^2+2zx+3yz}$$
$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$$
$$= \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2$$
$$\geq xy+yz+zx$$

Que é verdadeiro.

9) Para todos a, b, c, d reais positivos, prove que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

$solução$:

Análoga ao problema anterior.

10) Se x, y, z, w são números reais positivos, prove que

$$\frac{w}{x+2y+3z}+\frac{x}{y+2z+3w}+\frac{y}{z+2w+3x}+\frac{z}{w+2x+3y}\geq\frac{2}{3}$$

Solução:

Análoga ao problema anterior.

Pedro Pantoja, PET Matemática UFRN.