Progressão Aritmética
E
Progressão Geométrica

David Armando Zavaleta Villanueva
Departamento de Matemática-CCET-UFRN[1]

[1] villanueva@ccet.ufrn.br

Progressão Aritmética

Definição 1 *Chamamos de progresão aritmética a sequência de números* $(a_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, *onde cada termo, começando do segundo é igual ao anterior somado por uma constante única* d, *isto é,*

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O número d chama-se razão da progresão aritmética, a_1-primeiro termo e a_n-termo geral.

Assim por exemplo, a sequência

$$2, 7, 12, 17, 22, \ldots$$

tem como primeiro termo 2, e razão 5, pois $7 = 2 + 5$, $12 = 7 + 5$, etc..

Agora, tentemos deduzir uma fórmula que relacione o n-ésimo termo com o primeiro termo, o número de termos e a razão. De fato, escrevendo a definição para cada termo da progressão, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + d \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + d \\ \vdots\ &\ \vdots \\ a_3 &= a_2 + d \\ a_2 &= a_1 + d, \end{aligned}$$

donde somando

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Exemplo 1 *Para a progressão aritmética* $(a_n)_n$ *com* $a_1 = 7$ *e* $d = 4$, *obtemos a seguinte fórmula;* $a_n = 7 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 3$.

Em geral, podemos escrever o termo geral de uma progressão aritmética da seguinte maneira:

$$a_n = nd + (a_1 - d).$$

Para qualquer $n \geq 2$ temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = d, \\ a_n - a_{n-1} = d, \end{aligned}$$

desta forma

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

ou

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Assim, vemos que cada termo da progresão aritmética começando do segundo termo é igual a média aritmética do termo anterior e do termo posterior a ele.

Exemplo 2 *Mostre que a sequência $(a_n)_n$ com termo geral $a_n = 3n - 5$ é uma progressão aritmética.*

Solução Para $n \geq 2$ temos

$$a_n = 3n - 5,\ a_{n-1} = 3(n-1) - 5 = 3n - 8,\ a_{n+1} = 3n - 2.$$

Portanto

$$a_n = 3n - 5 = \frac{(3n-8) + (3n-2)}{2} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

o que demonstra a afirmação. ■

Já vimos acima que na progressão aritmética $(a_n)_n$ com razão d, vale $a_n = a_1 + (n-1)d$. Mas, isto pode-se escrever na forma $a_n = a_1 + (n - k + k - 1)d = a_1 + (k-1)d + (n-k)d$, ou seja tem lugar a seguinte fórmula:

$$a_n = a_k + d(n-k), \qquad 1 \leq k \leq n-1,$$

onde n e k são números naturais. Trocando k por $n-k$ e por $n+k$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-k} + kd, \\ a_n &= a_{n+k} - kd, \end{aligned}$$

donde encontramos

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \qquad 1 \leq k \leq n-1.$$

Vejamos $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_m = a_1 + (m-1)d$, $a_k = a_1 + (k-1)d$ e $a_l = a_1 + (l-1)d$. Daqui, $a_m + a_n = 2a_1 + (m+n) - 2)d$ e $a_k + a_l = 2a_1 + (k+l) - 2)d$.
Observamos que

$$a_m + a_n = a_k + a_l, \quad \text{se } m + n = k + l.$$

Exemplo 3 *Para uma progressão aritmética $(a_n)_n$ qualquer, obtemos as seguintes fórmulas;*

1. $a_{30} = \dfrac{a_{15} + a_{45}}{2}$, *pois* $a_{15} = a_{30-15}$ *e* $a_{45} = a_{30+15}$;

2. $a_{11} + a_{13} = a_{15} + a_9$.

Exemplo 4 *A soma do segundo e quarto termos da progressão aritmética $(a_n)_n$ é igual a 16, o produto do primeiro e quinto termos é igual a 28. Encontre o primeiro termo e a razão desta progressão.*

Solução: Por hipótese, temos $a_2 + a_4 = 16$ e $a_1 a_5 = 28$; então obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2d &= 8 \\ a_1(a_1 + 4d) &= 28. \end{cases}$$

Substituindo $2d$ da primeira equação na segunda equação, obtemos

$$a_1^2 - 16a_1 + 28 = 0, \text{ ou } (a_1 - 14)(a_1 - 2) = 0.$$

Desta forma, $a_1 = 14$ e $a_1 = 2$; portanto, $d = \dfrac{8 - a_1}{2} = \pm 3$.

Exemplo 5 *Os números 7 e -7 são o primeiro e oitavo termos respectivamente de uma progressão aritmética $(a_n)_n$. Encontre a_n para $n = 2, 3, \cdots, 7$.*

Solução: Como

$$d = \frac{a_8 - a_1}{8 - 1} = \frac{-7 - 7}{7} = -2,$$

então os correspondentes termos são

$$7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7.$$

Agora vamos a deduzir a fórmula para calcular a soma $S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$ dos primeiros n-termos de uma progressão aritmética $(a_n)_n$:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = \\ &= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + (n-2)d + a_n = \\ &= (n-1)a_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 2)d + a_n = \\ &= (n-1)a_1 + \frac{1 + n - 2}{2}(n-2)\frac{a_n - a_1}{n-1} + a_n = \\ &= \frac{na_1 + na_n}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}n. \end{aligned}$$

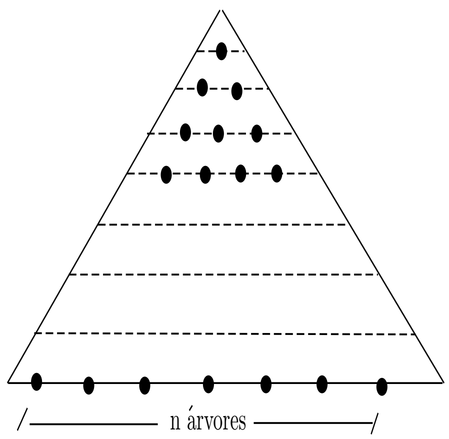
Mais fácil e genial é a ideia que teve o grande Gauss para calcular a soma do primeiros n números naturais:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

somando, obtemos $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1)$. Mas, como $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1)$, então

$$2S_n = (a_1 + a_n)n, \quad \text{donde} \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Exemplo 6 *Num jardim que possui a forma de um triângulo equilátero queremos saber se é possivel plantar 156 árvores, de tal forma que na primeira fileira colocamos uma árvore, na segunda fileira colocamos duas árvores, na terceira 3 árvores, e assim adiante até chegar a $n-$ésima fileira onde queremos colocar n árvores.*



Solução: Suponha que n seja o número de fileiras. Observamos, que a existência de tal jardim corresponde a existência de n, que satisfaça a seguinte igualdade

$$1 + 2 + \cdots n = 156.$$

Para isto, basta resolver a seguinte equação

$$\frac{n(n+1)}{2} = 156.$$

Encontramos daqui $n = 16$, ou seja, o jardim possui 16 fileiras.

Progressão Geométrica

Definição 2 *Chamamos de progressão geométrica a sequência de números* $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *onde cada termo, começando do segundo é igual ao termo anterior multiplicado por uma constante única* $q \neq 0$, *isto é,*

$$b_{n+1} = a_n q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O número q chama-se razão da progressão geométrica, b_1-primeiro termo e b_n-termo geral. Assim, por exemplo a sequência

$$1, 3, 9, 27, 81, \cdots$$

onde cada termo, começando pelo segundo, obtem-se do anterior multiplicando por 3 é uma progressão geométrica, de razão $q = 3$ e $b_1 = 1$.

Para uma progressão geométrica $\{b_n\}, n \geq 2$ com razão q, temos

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q,$$

isto é,

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1},$$

ou seja

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

Por exemplo, para a progressão geométrica

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \cdots, 3^{n-1}, \cdots$$

temos as seguintes igualdades

$$3^2 = 1 \cdot 9; \quad 9^2 = 3 \cdot 27; \quad 27^2 = 9 \cdot 81; \quad 243^2 = 81 \cdots 729; 3^{2n} = 3^{n-1} \cdot 3^{n+1}.$$

Exemplo 7 *Suponha que os números* a, b, c *são os termos consecutivos de uma progressão geométrica. Mostre que*

$$a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

Solução: Como a, b, c são os termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $b^2 = ac$. portanto

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) &= \frac{b^2 c^2}{a} + \frac{a^2 c^2}{b} + \frac{a^2 b^2}{c} = \frac{acc^2}{a} + \frac{b^4}{b} + \frac{a^2 ac}{c} = \\ &= a^3 + b^3 + c^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para qualquer progressão geométrica $\{b_n\}$ é válida a seguinte igualdade

$$b_m b_n = b_k b_l \qquad \text{se} \quad m + n = k + l.$$

Exemplo 8 *Suponha que todos os termos da progressão geométrica* $\{b_n\}$ *sejam positivos. Se* $b_{10} = 2$ *e* $b_{18} = 3$*. Encontre* b_{16} *e* $b_3 b_{27}$*.*

Solução: Como $10 + 18 = 14 + 14$, então $b_{14}^2 = b_{10} b_{18} = 6$; portanto, $b_{14} = \sqrt{6}$. Também, como $14 + 18 = 16 + 16$, então $b_{16}^2 = b_{14} b_{18} = 3\sqrt{6}$, isto é, $b_{16} = \sqrt{3\sqrt{6}}$. Porfim, de $14 + 16 = 30 = 3 + 27$, segue que,

$$b_3 b_{27} = b_{14} b_{16} = \sqrt{6}\sqrt{3\sqrt{6}} = 3\sqrt{2\sqrt{6}}. \qquad \blacksquare$$

A soma $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ dos primeiros n termos de uma progressão geométrica $\{b_n\}$ de razão $q \neq 0$ é dado pela fórmula

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

se $q = 1$, então $S_n = n b_1$.
Por exemplo,

1. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1;$

2. $\dfrac{1}{5^3} + \dfrac{1}{5^4} + \cdots + \dfrac{1}{5^{n-1}} = \dfrac{1}{5^3} \dfrac{1 - (\frac{1}{5})^{n-3}}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{1}{100}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n-3}}\right).$

Exemplo 9 *Calcular a seguinte soma*

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots + n a^{n-1}, \quad a \neq 0.$$

Solução: Multiplicando S_n por a, temos

$$a S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots + n a^n,$$

então

$$a S_n - S_n = n a^n - (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots a^{n-1}),$$

ou

$$(a - 1) S_n = n a^n - (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots a^{n-1}).$$

Como

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

obtemos

$$S_n = \frac{n a^n}{a - 1} - \frac{a^n - 1}{(a - 1)^2}.$$

Exemplo 10 *Calcular a seguinte soma*

$$S = 8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{8888 \cdots 8888}_{1000 \ \textit{algarítmos}}.$$

Solução. O número $\underbrace{8888\cdots888}_{n\text{ algarítmos}}$ para qualquer n natural, podemos escrever na forma

$$\underbrace{8888\cdots888}_{n\text{ algarítmos}} = 8\frac{\overbrace{1111\cdots111}^{n\text{ algarítmos}}}{1} = 8\frac{\overbrace{9999\cdots999}^{n\text{ algarítmos}}}{9} = 8\frac{10^n-1}{9}.$$

Então

$$\begin{aligned} S &= 8\frac{10-1}{9} + 8\frac{10^2-1}{9} + 8\frac{10^3-1}{9} + \cdots + 8\frac{10^{1000}-1}{9} = \\ &= 8\frac{1}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{1000} - 1000) = \\ &= 8\frac{1}{9}[\frac{10(10^{1000}-1)}{10-1} - 1000] = 8\frac{1}{9}(\underbrace{1111\cdots11}_{1000\text{ algarítmos }1}0 - 1000) \\ &= \frac{8}{9}(\underbrace{1111\cdots11}_{997\text{ algarítmos }1}0110). \end{aligned}$$

Exercícios

1. Mostre que se $(a_n)_n$ é uma progressão aritmética, então
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

2. Resolva
$$(x+1)+(x+4)+(x+7)+\ldots+(x+28)=155.$$

3. Calcule
$$(100)^2-(99)^2+(98)^2-(97)^2+\ldots+2^2-1^2.$$

4. Mostre que para a progressão geométrica $(b_n)_n$, de razão q, com $n \geq 2$, valem

   (a) $b_2+b_4+b_6+\ldots+b_{2n}=\dfrac{q}{1+q}S_{2n}$;

   (b) $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\ldots+\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{S_n}{b_1b_n}$.

5. Mostre que se a, b, c, d são os termos consecutivos de uma progressão geométrica, entao
$$(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2=(a-d)^2.$$

Problemas Complementares

1. As páginas de um livro são numeradas de 1 até n. Quando foi feita a numeração das páginas, uma delas foi erroneamente numerada duas vezes, resultando um total de 1986 páginas.
   Qual foi o número da página repetida?

2. Um mágico pede a um dos espectadores que escreva num tabuleiro 8×8 os inteiros de 1 até 64, um número em cada um dos quadrados unitários, da maneira seguinte:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

   O mágico, sem ver o tabuleiro, solicita que o espectador escolha um número qualquer do tabuleiro e apague a linha e a coluna contendo este número e que repita este procedimento para o tabuleiro 7×7 resultante, e assim por diante até o último número. Sem ver nenhum dos números, o mágico diz a soma de todos eles. Como o mágico consegue "advinhar"?

3. Do conjunto dos números inteiros $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ apagamos 5 número que formam uma progressão aritmética. A soma dos números restantes é 5000.

   (a) Determine todos os valores de n para os quais isto é possível.

   (b) Para cada n satisfazendo (a), determine os 5 inteiros possíveis de serem apagados.

4. Do conjunto dos números inteiros $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ apagamos 3 número que formam uma progressão geométrica. A soma dos números restantes é 6125.

   (a) Determine todos os valores de n para os quais isto é possível.

   (b) Para cada n satisfazendo (a), determine os 5 inteiros possíveis de serem apagados.

5. Qual é o número máximo de termo de uma progressão geométrica de razão maior do que 1 formada inteiramente por números inteiros entre 100 e 1000, inclusive?

6. Sejam a, b, c as raízes cúbicas de três inteiros primos distintos. Mostre que a, b, c não podem ser termos (consecutivos ou não) de uma progressão aritmética.

7. Diga, justificando, se é possível escolher 1983 inteiros positivos distintos, todos menores do que ou iguais a 100000, de modo que nenhum terno deles esteja em progressão aritmética.