Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL N0. 01 - Data 18/02/2013

NÍVEL I

Dois homens caminhavam no deserto. Um deles possuía 5 litros de água e 5 pães e o outro trazia 3 litros de água e 5 pães e o outro trazia 3 litros de água e 3 pães. No momento em que se preparavam para descansar, avistaram um homem que estava bastante exausto e com sede. Resolveram repartir a água e os pães igualmente com os três. Dois dias depois chegaram a um oásis. Ao se despedir, em sinal de agradecimento, o homem deu 8 moedas de ouro para os dois que tinham salvo a sua vida.

Se a divisão foi feita de forma justa, com quantas moedas cada um deles ficou?

SOLUÇÃO

Como cada um tem a mesma quantidade de pães e água, vamos pensar em termos dos pães. Dividimos cada pão em três partes iguais. Desse modo, o primeiro homem ficou com 15 partes e o segundo com 9 partes. Ao todo temos 24 partes, que dividido por 3 resulta 8 partes para cada um. Assim, o primeiro homem ficou com 8 partes e deu 7 e o segundo ficou com 8 e cedeu 1 para o homem que encontraram. Portanto, para que a divisão seja feita de forma justa, o primeiro homem deve receber 7 moedas e o outro 1 moeda.

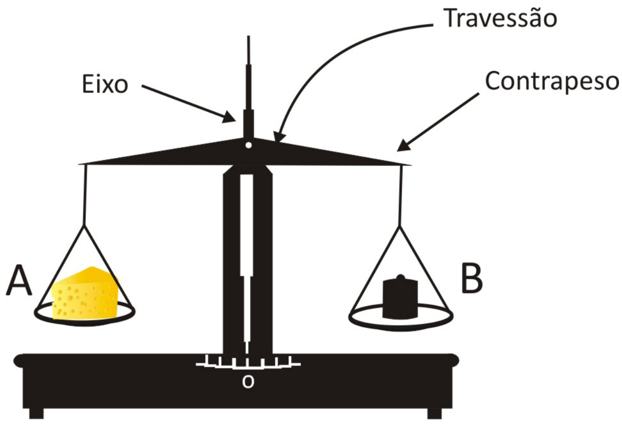
NÍVEL II

Comprei na feira um queijo que pesou 32 quilos numa balança de dois pratos. Desconfiei da pesagem e o vendedor propôs, como compensação, vender-me um queijo igual, desta vez pesado no outro prato da balança. O peso foi de 18 quilos.

Ganhei ou perdí na transação? Qual é o verdadeiro peso do queijo?

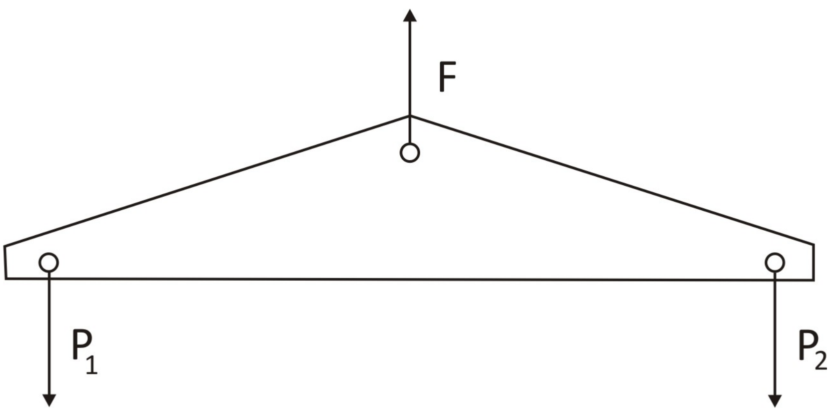
SOLUÇÃO

Inicialmente, vamos revisar como funciona uma balança de dois pratos. Como sabemos, a balança de dois pratos é composta basicamente por um travessão horizontal, apoiado por um eixo vertical, veja Figura seguir:



Nela há dois pratos suspensos nas extremidades do travessão horizontal. O objeto de massa desconhecida é colocado em uns dos pratos, o prato A na figura, e o objeto de massa conhecida (massa padrão) é colocado no outro prato, prato B, até atingir o equilíbrio estático.

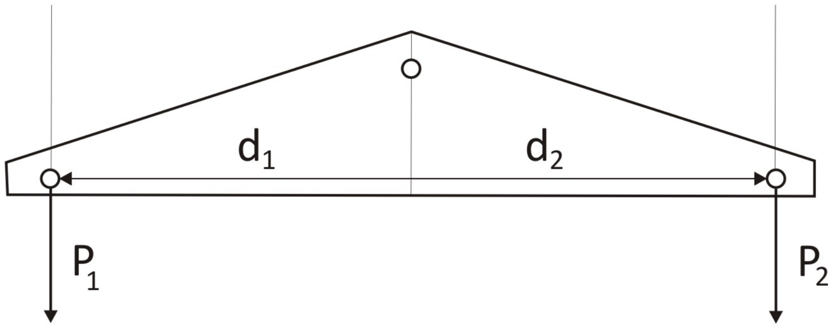
Quando colocamos qualquer objeto em uma das bandejas, esta gira e se desloca para baixo. Para que a balança volte a se equilibrar mantendo os pratos na horizontal, é necessário colocar na outra bandeja, objetos de massas padronizadas, de forma que a força gravitacional F resultante sobre os padrões seja igual à força gravitacional que atua sobre o objeto, compensando assim seus respectivos torques. Logo, a primeira condição de equilíbrio exige que a resultante das forças sobre a parte móvel da balança seja zero. Com a balança equilibrada temos: a soma das intensidades das duas forças $P1 + P2$ para baixo é igual a F. Assim, a resultante das forças é nula, o que satisfaz uma das condições necessárias para haver equilíbrio, veja Figura a seguir.



A segunda condição de equilíbrio diz respeito à resultante dos torques sobre a parte móvel da balança e que também deve ser nula, ou seja,

$$P_1 \times d_1 = P_2 \times d_2,$$

onde d_1 e d_2 são respectivamente, as distância do peso e contra peso ao ponto de apoio do travessão horizontal, veja figura a seguir.



Em geral, a balança tem braços iguais, donde $d_1 = d_2$ e, portanto, $P_1 = P_2$.

Observe que, como o valores dos pesos $P_1 e P_2$ são dados por $P_1 = m_1 \times g$ e $P_2 = m_2 \times g$, onde m_1, m_2 são os valores das massas e g é a aceleração da gravidade, a equação $P_1 \times d_1 = P_2 \times d_2$ pode ser reescrita como $m_1 \times g \times d_1 = m_2 \times g \times d_2$, que, simplificando, se reduz a $m_1 \times d_1 = m_2. \times d_2$.

Normalmente, quando falamos do peso estamos nos referindo acerca da massa.

Voltando ao problema, sejam x o valor real da massa do queijo, a, b os pesos falsos, e d_1, d_2 respectivamente, as distâncias do peso e contra peso ao ponto de apoio do travessão horizontal. Assim, temos as duas equações:

$$x \times d_1 = b \times d_2 \quad \text{(Equação } (*))$$

$$x \times d_2 = a \times d_1 \quad \text{(Equação } (**))$$

Multiplicando as equações $(*)$ e $(**)$, obtemos:

$$x^2 \times d_1 \times d_2 = a \times b \times d_1 \times d_2$$

Cancelando, obtemos: $x^2 = a \times b \Longrightarrow x = \sqrt{ab}$.

Portanto, o peso real é a média geométrica entre os pesos falsos. Ou seja, o peso verdadeiro dos queijos era $x == \sqrt{32 \times 18} = 24$. Mas, eu paguei $(32 + 18) = 50$ quilos e obtive somente $(24 + 24) = 48$ quilos. Portanto, perdi 2 quilos.

NÍVEL III

Se vão a óbito 3 dentre 7 pacientes de um médico A; 4 dentre 13 de um médico B, e 5 dentre 19 de um médico C, qual é a probabilidade de um homem doente sobreviver se ele é paciente de todos os três médicos ao mesmo tempo?

SOLUÇÃO

Se morrem 3 dentre 7 pacientes do médico A, sobrevivem $\frac{4}{7}$. Do mesmo modo, sobrevivem $\frac{9}{13}$ dos pacientes do médico B e $\frac{14}{19}$ do médico C. Portanto, a probabilidade de um homem doente sobreviver, se ele é paciente de todos os três médicos ao mesmo tempo, é $\frac{4}{7} \times \frac{9}{13} \times \frac{14}{19} = \frac{72}{247}$.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Encontre todas as funções diferenciáveis $f(x)$ satisfazendo a equação $(f(x))^{2000} = \int_1^x (f(t))^{1999} dt$.

SOLUÇÃO

As únicas duas funções satisfazendo a equação dada são $f(x) \equiv 0$ e $f(x) = \frac{x-1}{2000}$. É óbvio que a função $f(x) \equiv 0$ satisfaz a equação dado, pois zera ambos os lados da equação.

Suponha que $f(x)$ satisfaz a equação dada e $f(x) \neq 0$. Diferencinado ambos os membros da equação dada, temos:

$$2000(f(x)^{1999}.f'(x) = (f(x))^{1999}$$

Como $f(x) \neq 0$, podemos cancelar $(f(x))^{1999}$ em ambos os lados da última igualdade, obtendo $f'(x) = \frac{1}{2000}$. Agora, integrando ambos os lados, obtemos $f(x) = \frac{x}{2000} + K$, onde K é uma constante. Da equação original, fazendo $x = 1$, é fácil ver que $f(1) = 0$. Isto implica que $0 = f(1) = \frac{1}{2000} + K$, que nos dá $K = -\frac{1}{2000}$. Portanto, $f(x) = \frac{x}{2000} + K = \frac{x}{2000} - \frac{1}{2000} = \frac{x-1}{2000}$.