
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 03 - Data 25/03/2013

NÍVEL I

SOLUÇÃO

Um livro tem 250 páginas. Quantas vezes o dígito 2 foi usado para numerar as páginas do livro?

SOLUÇÃO

De 1 até 19 usa-se duas vezes o dígito 2. De 20 até 29 usa-se 11 vezes. De 30 a 99 usa-se 7 vezes. De 100 a 129 usa-se 13 vezes. De 130 a 199 usa-se 7 vezes. De 200 a 219 usa-se 22 vezes. De 230 a 250 usa-se 23 vezes. No total o dígito 2 foi usado $2 + 11 + 7 + 13 + 7 + 22 + 23 = 85$ vezes.

NÍVEL II

Numa festa compareceram 201 pessoas de cinco nacionalidades distintas. Em cada grupo de seis, no mínimo duas pessoas possuem a mesma idade.

Mostre que, nessa festa, existem no mínimo cinco pessoas do mesmo país, de mesma idade e do mesmo sexo.

SOLUÇÃO

Como as 201 pessoas são de cinco nacionalidades distintas, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem no mínimo 41 de mesma nacionalidade (para ver isso, basta separar as pessoas entre 5 grupos). Agora, podemos concluir que, dentre essas 41 pessoas de mesma nacionalidade, existem no mínimo 21 do mesmo sexo (basta separar as 41 pessoas em dois grupos: homens e mulheres). Vamos denotar por a_i, com $1 \leq i \leq 21$ as idades dessas 21 pessoas de mesmo sexo.

Usando a hipótese do problema, considere que, dentre as idades $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, no mínimo 2 delas sejam iguais. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_1 = a_2$. De maneira análoga, vamos supor que dentre $a_3, a_4, a_5, a_6, a_[7, a_[8$ temos $a_3 = a_4$. Continuando dessa maneira, podemos supor que $a15 = a_{16}$. Agora, a sequência das 21 idades pode ser escrita como:

$a_2, a_2, a_4, a_4, a_6, a_6, a_8, a_8, a_{10}, a_{10}, a_{12}, a_{12}, a_{14}, a_{14}, a_{16}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}$

Agora, considere as idades $a_2, a_6, a_{10}, a_{12}, a_{14}, a_{16}$. Como duas delas tem de ser iguais, podemos supor que: $a_2 = a_i$, para algum i diferente de 2 ou $a_6 = a_i$, para algum i diferente de 6. Em qualquer uma dessas hipóteses teremos cinco idades iguais como queríamos.

Assim, dentre as idades $a_{10}, a_{12}, a_{14}, a_{16}$ temos que ter duas iguais. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_{10} = a_{12}$. Com essas considerações, a sequência das idades pode ser entendida como sendo

$$a_2, a_2, a_2, a_2, a_6, a_6, a_6, a_6, a_{10}, a_{10}, a_{10}, a_{10}, a_{14}, a_{14}, a_{16}, a_{17}, a_{18, a_{19}, a_{20}, a_{21}}$$

Se qualquer idade a_i, com $17 \leq i \leq 21$ está entre as idades a_2, a_6, a_{10}, então conluímos o que queríamos. Caso contrário, considere as idades $a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, a_{16}, x$, onde x é qualquer idade entre as cinco últimas. Neste caso, cada x tem de ser igual a a_{14} ou a_{16}. Sem perda de generalidade, supomos os três termos iguais a a_{14}. Isto prova que cinco idades são iguais a a_{14}, de mesmo sexo, como queríamos.

NÍVEL III

Cinco piratas encontram uma bolsa com cinco moedas de ouro. Eles decidem que o pirata mais baixo será o tesoureiro e distribuirá as moedas- se metade ou mais dos piratas (incluindo o tesoureiro) concordam com a distribuição; caso contrário, o tesoureiro será morto e o pirata mais baixo dentre os restantes se tornará tesoureiro. Este processo continuará até que uma distribuição de moedas é acordada.

Se cada pirata sempre age pensando em ficar vivo, se possível, maximar a sua riqueza e querendo de ver outro pirata morrer, quantas moedas o pirata mais baixo vai propor para si mesmo?

SOLUÇÃO

A resposta é 3. Sejam p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 os piratas, em ordem crescente de altura. Suponha que restassem somente p_4 e p_5. Neste caso, qualquer estratégia de divisão sugerida de p_4 será aceita, pois seu voto já constitui a metade dos piratas restantes. Neste caso, ele pode sugerir ficar com todas as moedas. Agora, vamos imaginar que restassem três piratas: p_3, p_4 e p_5. A distribuição proposta por p_3 seria aceita por p_5 se ele recebesse uma ou mais moedas, pois caso contrário cairíamos no caso anterior no qual ele não receberia qualquer moeda. Assim, a proposta de p_3 seria propor 4 moedas para si e 1 moeda para p_5. Se restassem quatro piratas: p_2, p_3, p_4 e p_5. Neste caso, a proposta do tesoureiro p_2 seria ficar com 4 moedas e dar uma moeda para p_4, que aceitaria, pois, caso contrário, cairia no caso anterior, onde ele não receberia nada. Com cinco piratas, o tesoureiro p_1 proporia ficar com 3 moedas e dar 1 moeda para p_3 e 1 moeda para p_5. Nesta situação, os dois piratas aceitariam pois, caso contrário não receberiam qualquer moeda. Portanto, a proposta do pirata mais baixo é ficar com 3 moedas.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja A uma matriz 3×3 com entradas racionais, tal que $A^3 = I$.

Mostre que $A^4 = I$

SOLUÇÃO

Seja $m_A(x)$ o polinomio mínimo da matriz A sobre os racionais. Assim, $m_A(x)$ é um polinomio com coeficientes racionais de grau no máximo 3. Por outro lado, $m_A(x)$ divide o polinomio $x^8 - 1$, cuja fatoração sobre os racionais é a seguinte:
$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$. O polinomio $m_A(x)$ tem de ser um produto de algum desses fatores, e $x4+1$ não pode ser um deles. Portanto, $m_A(x)$ divide o polinomio $(x-1)(x+1)(x^2+1) = x^4 - 1$, que implica $A^4 = I$.